

Estabilidad de Sistemas No-lineales: Sistema de Nivel de Líquidos de Dos Tanques Interconectados.

Anzures M. Juan, Padilla G. José A. y Cuevas S. Omar.

Resumen— En el presente artículo se plantea una metodología para el análisis de estabilidad de los sistemas no lineales utilizando el método directo e indirecto de Lyapunov. Al mismo tiempo, se plantea la solución desde el punto de vista gráfico a partir del Retrato de Fase obtenido utilizando la herramienta “*Pplane7.m*” de Matlab®. Se presenta una revisión de las principales características de los sistemas no lineales y se listan los principales puntos de equilibrio para dichos sistemas, así como sus propiedades. El análisis realizado está desarrollado para sistemas de segundo orden representados mediante variables de estado. El ejemplo de aplicación está basado en el modelo de un sistema hidráulico no lineal de dos tanques interconectados.

Palabras clave—Estabilidad de Lyapunov, Método directo e indirecto de Lyapunov, Puntos de equilibrio, Estabilidad asintótica, Retrato de fase.

I. INTRODUCCIÓN

La mayoría de sistemas físicos son de naturaleza no lineal. Sin embargo, es posible realizar aproximaciones de estos sistemas para considerarlos como sistemas lineales. La aplicación de técnicas de control no lineal permite un mejor entendimiento del sistema físico y por ende mejores resultados en el control del mismo. Por esta razón, durante el modelado del sistema físico es necesario considerar la estabilidad del mismo y los puntos de equilibrio [10].

Así, la estabilidad es una de las características más importantes de los sistemas dinámicos. Cuando se analiza la estabilidad de dichos sistemas, surgen diferentes problemas según la manera en que se caracterice el propio sistema en consideración. Por ejemplo, para sistemas lineales y

estacionarios, existen métodos para poder determinar su estabilidad entrada acotada salida acotada (BIBO por sus siglas en inglés Bounded Input Bounded Output; es decir, un sistema lineal invariante en el tiempo se dice BIBO estable si y sólo si a toda función de entrada acotada le corresponde una función de salida acotada) tales como el criterio de la respuesta al impulso, el criterio de Routh y el de Nyquist. Sin embargo cuando se tratan sistemas no lineales, estos métodos no tienen validez.

La riqueza dinámica de los sistemas no lineales presenta ciertos fenómenos que no son evidentes en los sistemas lineales [1]. Uno de estos fenómenos es la existencia de *múltiples puntos de equilibrio aislados*. Un sistema lineal puede tener un solo punto de equilibrio aislado, y por lo tanto un solo estado de régimen estacionario que –si el punto es estable– atrae al estado del sistema independientemente del estado inicial. En cambio, los sistemas no lineales pueden tener varios puntos de equilibrio, y la convergencia a uno estable depende del estado inicial. Es por ello que, resulta importante estudiar la estabilidad de los diferentes puntos de equilibrio de los sistemas no lineales con lo cual se logra un mejor entendimiento del comportamiento del mismo.

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable en el sentido de Lyapunov si todas las soluciones que nacen en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en dichas cercanías; de otra forma resulta inestable. El punto de equilibrio también es asintóticamente estable si las soluciones además de permanecer en las cercanías del mismo, tienden hacia el punto de equilibrio a medida que transcurre el tiempo [3], [4], [11]. Así además, la estabilidad se puede analizar utilizando técnicas gráficas como lo es un retrato de fase, donde se muestran las regiones o puntos estables del sistema y la dirección desde la cual se alcanza la estabilidad.

En este artículo se presentan algunas técnicas de análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio de sistemas no lineales mediante el análisis del comportamiento del estado en una vecindad del punto de equilibrio. La estabilidad se analiza en el sentido de Lyapunov mediante sus dos métodos directo e indirecto. Una característica importante en el artículo es la utilización de la herramienta de Matlab® llamada “*Pplane7.m*”, mediante la cual se obtienen los retratos de fase para mostrar los conceptos de estabilidad de los puntos de equilibrio de manera gráfica con ello se facilita la interpretación del análisis. El sistema no lineal seleccionado para el análisis es un sistema hidráulico formado por dos tanques interconectados. En la Figura 2 se muestra un esquema del mismo.

Manuscrito recibido el 25 de Marzo de 2008. Este trabajo fue respaldado por la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ing. Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Anzures M. Juan hasta la fecha se ha desempeñado como Profesor de Tiempo Completo de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, División de Estudios de Posgrado; Ave. Fco. J. Mújica S/N, Ciudad Universitaria; Morelia, Michoacán., México; C.P. 58030; Tel: (443) 3223500, ext. 4354 y 1115; Fax: (443) 327 9728. (e-mail janzures@jupiter.umich.mx).

José A. Padilla hasta la fecha se ha desempeñado como estudiante de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica de la División de Estudios de Posgrado de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, actualmente cursa el tercer semestre de la Opción de Control Automático. (e-mail joseaaron@latinmail.com).

Omar C. Silva hasta la fecha se ha desempeñado como estudiante de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica de la División de Estudios de Posgrado de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, actualmente cursa el tercer semestre de la Opción de Control Automático (e-mail mayrux@hotmail.com).

La estructura del artículo es como sigue: en la sección II se presentan las principales propiedades de los sistemas no lineales, definiciones básicas así como la clasificación de los principales puntos de equilibrio que se presentan en los sistemas no lineales. En la sección III se hace una presentación básica de la teoría de estabilidad de Lyapunov. En la sección IV se presenta el modelo del sistema bajo análisis, se muestran los resultados de estabilidad aplicando la teoría de Lyapunov, asimismo se muestran los resultados gráficos usando la herramienta “*PPlane7.m*” de Matlab® usando tres escenarios a partir del cambio de la naturaleza del flujo de entrada al sistema. Finalmente la sección V presenta algunas conclusiones generales del trabajo presentado en este artículo. Es de interés de los autores mostrar la facilidad del uso de la herramienta de Matlab® para el análisis de la estabilidad de sistemas no lineales. En el presente artículo no se hace la demostración de los teoremas, el lector se puede referir a las citas que se enlistan después de los teoremas.

II. PROPIEDADES DE UN SISTEMA NO LINEAL

Generalmente cuando se trabaja con sistemas dinámicos que son modelados mediante un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas, donde las variables de estado representan la “memoria” que tiene el sistema dinámico de su pasado. Usualmente se emplea la notación vectorial para escribir estas ecuaciones de manera compacta, se puede definir y reescribir las n ecuaciones diferenciales de primer orden como una ecuación diferencial vectorial de dimensión n [1].

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa los estados, $u \in \mathbb{R}^p$ son las variables de entrada todo con respecto al tiempo t .

Todos los sistemas físicos son inherentemente no lineales, los sistemas de control son no lineales en una cierta extensión y pueden ser descritos mediante ecuaciones diferenciales no lineales.

El sistema no lineal puede ser aproximado mediante un sistema linealizado:

1. Si el rango de operación es pequeño.
2. Si las no linealidades involucradas son suaves.
3. Si su dinámica se describe mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales.

Por esta razón, tienen un rango de operación más amplio y su comportamiento en la vecindad de un punto de equilibrio es similar a la del sistema lineal. Es decir, el estudio de estos sistemas mejora la interpretación de los sistemas dinámicos.

Los sistemas no lineales pueden presentar oscilaciones de amplitud y periodo fijos sin excitación externa, es decir, pueden presentar lo que se conoce como *ciclos límite*. Además, los cambios cualitativos de los parámetros de un sistema no lineal conllevan a cambios cualitativos de las propiedades del sistema.

En los sistemas lineales, pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden causar sólo pequeñas

diferencias en la salida. Los sistemas no lineales pueden desplegar un fenómeno llamado *caos*. Un sistema estable tiende a lo largo del tiempo a un punto de equilibrio, u órbita, según su dimensión (atractor). Un sistema inestable se escapa de los atractores. Y un sistema caótico manifiesta los dos comportamientos. Por un lado, existe un atractor por el que el sistema se ve atraído, pero a la vez, hay “fuerzas” que lo alejan de éste. De esa manera, el sistema permanece confinado en una zona de su espacio de estados, pero sin tender a un atractor fijo. Una de las mayores características de un sistema inestable es que tiene una gran independencia de las condiciones iniciales. De un sistema del que se conocen sus ecuaciones características, y con unas condiciones iniciales fijas, se puede conocer exactamente su evolución en el tiempo. Pero en el caso de los sistemas caóticos, una mínima diferencia en esas condiciones hace que el sistema evolucione de manera totalmente distinta [12]. Ejemplos de tales sistemas incluyen la atmósfera terrestre, el Sistema Solar, las placas tectónicas, los fluidos en régimen turbulento y los crecimientos de población.

Una de las herramientas gráficas útiles para la visualización cualitativa del comportamiento de sistemas no lineales es el llamado *Retrato de Fase*, el cual está constituido por la familia de todas las trayectorias o soluciones de un sistema no lineal de segundo orden para diferentes condiciones iniciales, a través de las isoclinas. Este método fue introducido por Henri Poincaré, dicho método es aplicable a cualquier tipo de no linealidad, con la premisa de que muchos sistemas se pueden aproximar a uno de segundo orden, sin embargo, desde otro punto de vista esto puede representar una ligera desventaja. En el presente artículo se utiliza la herramienta “*PPlane7.m*” de Matlab® para dibujar el retrato de fase del sistema no lineal motivo de análisis, es decir, del sistema de nivel de líquido de dos tanques interconectados.

A. Clasificación de los puntos de equilibrio

De acuerdo a la ubicación de los polos del sistema los puntos de equilibrio en un sistema no lineal se pueden clasificar como:

1. *Nodo estable*, si los polos son reales y se encuentran en el semiplano-izquierdo.
2. *Nodo inestable*, si los polos son reales y se encuentran en el semiplano-derecho.
3. *Foco estable* (espira) cuando los polos son complejos en el semiplano izquierdo.
4. *Foco inestable* (espira) cuando los polos son complejos en el semiplano-derecho.
5. *Centro*, cuando los polos son complejos en el eje imaginario.
6. *Nodo silla*, cuando hay un polo real en el semiplano izquierdo y otro en el semiplano derecho.
7. *Línea continua de puntos de equilibrio*, cuando un polo es nulo.
8. *Puntos de equilibrio hiperbólico* (estructuralmente estable): conserva su comportamiento cualitativo ante pequeñas perturbaciones. Condición: las raíces del modelo linealizado tiene $\text{Re } \lambda \neq 0$.

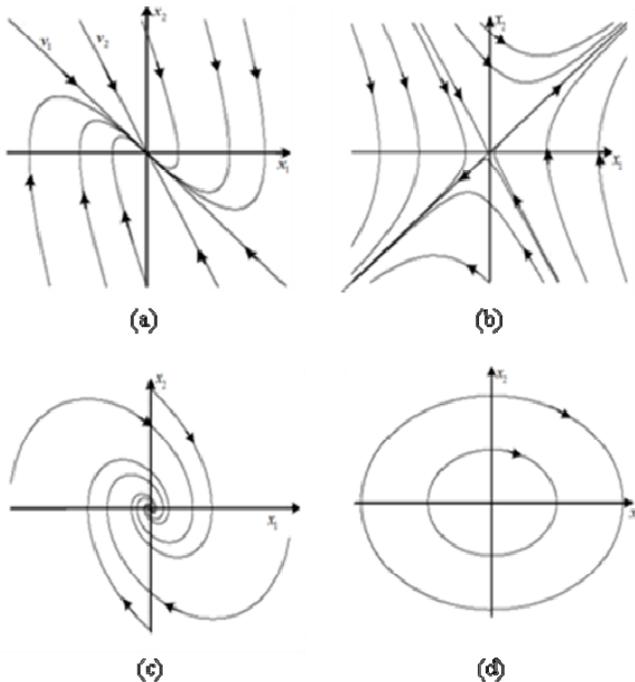


Fig. 1. Ejemplos gráficos de los puntos de equilibrio para un sistema no lineal. (a) Nodo estable, (b) Nodo silla, (c) Foco estable y (d) Centro

El comportamiento cualitativo de un sistema no lineal cerca de un punto de equilibrios puede determinarse por medio de la linealización. Los puntos de equilibrio de un sistema no lineal reciben el mismo nombre del caso lineal (*nodo*, *foco*, *silla*). Un punto de equilibrio (PE) es aislado si al linealizar, $|A| \neq 0$. Por ejemplo, el péndulo invertido tiene puntos de equilibrio tipo foco.

En la Figura 1 se muestran 4 ejemplos de diagramas de retrato de fase para puntos de equilibrio.

III. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Un punto de equilibrio se dice estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del mismo, de otro modo el punto de equilibrio es inestable. Un punto de equilibrio se dice asintóticamente estable si todas las soluciones que inicien en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito.

Teorema 1 (Método Directo): Sea el origen $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$ donde $f : D \subset \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un entorno del origen. Sea

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Entonces, el origen es ASINTÓTICAMENTE ESTABLE si todos los valores propios de A tienen parte real negativa.

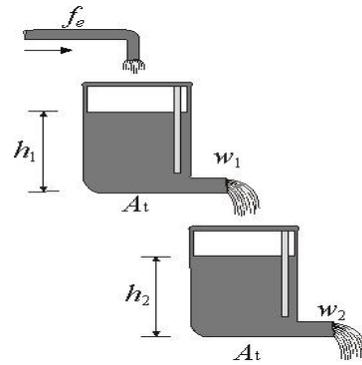


Fig. 2. Sistema Hidráulico de dos tanques en cascada.

El origen es INESTABLE si uno o más valores propios de A tienen parte real positiva. ♦

Teorema 2 (Método Indirecto): Sea el origen $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen. Sea $V \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que:

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en} \quad D$$

Entonces $x = 0$ es ESTABLE, más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en} \quad D,$$

entonces $x = 0$ es ASINTÓTICAMENTE ESTABLE ♦.

La demostración de los teoremas 1 y 2 se pueden ver en [1], [3] y [4].

IV. APLICACIÓN: SISTEMA HIDRÁULICO DE DOS TANQUES INTERCONECTADOS

El sistema bajo análisis está formado por dos tanques conectado en cascada, es decir, el flujo de salida del primer tanque es el flujo de entrada al segundo tanque, como se muestra en la Figura 2.

El modelo matemático del sistema está definido por:

$$\dot{h}_1(t) = \frac{f_e}{A_t} - \frac{w_1}{A_t} \sqrt{h_1} \quad (1)$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{w_1}{A_t} \sqrt{h_1} - \frac{w_2}{A_t} \sqrt{h_2} \quad (2)$$

Donde h_1 y h_2 son los niveles de los tanques, f_e el flujo de alimentación o entrada, w_1 y w_2 son las razones del flujo de salida de cada depósito, y A_t el área de la sección transversal del tanque.

A. Sistema Hidráulico con entrada unitaria

Para fines prácticos de estudio tomamos los siguientes valores:

$$w_1 = A_t = f_e = 1(\text{unidades}) \quad w_2 = 2(\text{unidades})$$

Sustituyendo, el sistema (1)-(2) se convierte en:

$$\dot{h}_1(t) = 1 - \sqrt{h_1} \quad (3)$$

$$\dot{h}_2(t) = \sqrt{h_1} - 2\sqrt{h_2} \quad (4)$$

El siguiente paso de la metodología es encontrar los puntos de equilibrio. Para ello primero, igualamos a cero las derivadas, es decir:

$$\dot{h}_1 = f_1(h_1, h_2) = 0$$

$$\dot{h}_2 = f_2(h_1, h_2) = 0$$

De la ecuación (3) obtenemos que:

$$1 - \sqrt{h_1} = 0 \quad \therefore \quad h_1 = 1$$

De la ecuación (4) y sustituyendo h_1 :

$$\sqrt{h_1} - 2\sqrt{h_2} = 0 \quad \therefore \quad h_2 = \frac{1}{4}$$

De lo anterior se observa que el sistema tiene un sólo punto de equilibrio (para estas condiciones) el cual se encuentra en $(h_1 = 1, h_2 = \frac{1}{4})$.

A continuación, se prueba la estabilidad del punto de equilibrio usando primero el método indirecto de Lyapunov, es decir, usando linealización, para ello se determina el Jacobiano establecido por el teorema 1 definido como:

$$A = \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{h=PE} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} & \frac{\partial f_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \end{bmatrix}_{h=PE}$$

Resultando:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{h_1}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{h_1}} & -\frac{1}{\sqrt{h_2}} \end{bmatrix}_{h=(1, \frac{1}{4})} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Se encuentran los valores propios de A.

$$\det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s + \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & s + 2 \end{pmatrix} = \left(s + \frac{1}{2}\right)(s + 2)$$

Por lo que los eigenvalores son:

$$s_1 = -\frac{1}{2} \quad y \quad s_2 = -2$$

Entonces, debido a que los polos son reales negativos el punto de equilibrio es un *NODO ESTABLE*, de acuerdo a la clasificación de los puntos de equilibrio, vista en la sección II.

Ahora, usando el método directo de Lyapunov:

Sea la función de Lyapunov $V(h) = h^T Ph$ donde

$P = Identidad$, es decir:

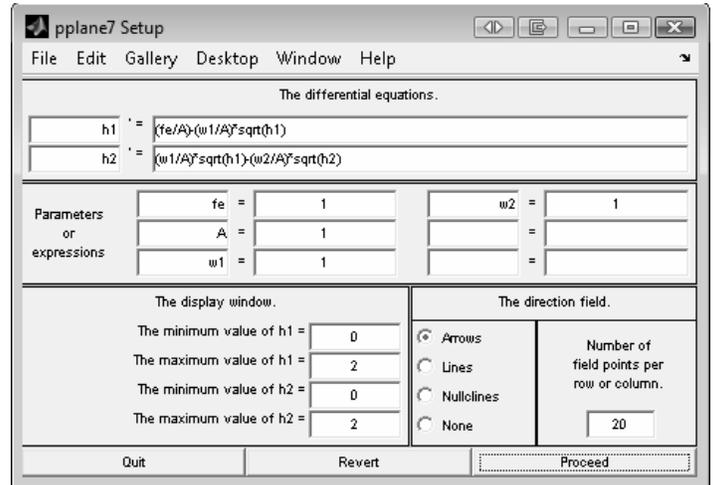


Fig. 3. Interfase gráfica para la introducción de las ecuaciones del sistema hidráulico en Pplane7.m.

$$V(h) = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$$

Con esto se cumple la primera condición $V(h) > 0$ del teorema 2. Posteriormente se obtiene:

$$\dot{V}(h) = \frac{\partial V(h)}{\partial h_1} \dot{h}_1 + \frac{\partial V(h)}{\partial h_2} \dot{h}_2$$

La cual nos queda como:

$$\dot{V}(h) = h_1(1 - \sqrt{h_1}) + h_2(\sqrt{h_1} - 2\sqrt{h_2})$$

Reordenando los términos

$$\dot{V}(h) = -(\sqrt[3]{h_1^2} + 2\sqrt[3]{h_2^2}) + (h_1 + \sqrt{h_1}h_2)$$

Donde es fácil ver que el primer término de la derecha es el término dominante; es decir,

$$(h_1 + \sqrt{h_1}h_2) \leq (\sqrt[3]{h_1^2} + 2\sqrt[3]{h_2^2})$$

Entonces, sin importar los valores que tome h_1 y h_2 la $\dot{V}(h)$ nunca tomará valores positivos, esto es, se cumple la segunda condición del teorema 2 $\dot{V}(h) \leq 0$. Por lo tanto el punto de equilibrio es ESTABLE.

Una segunda parte del análisis de estabilidad propuesto en este artículo, es la simulación utilizando la herramienta o rutina "Pplane7.m" de Matlab®, con la cual a través de su interfase podemos construir los retratos de fase de sistemas no lineales de segundo orden (se usan las dos ecuaciones). La interfase gráfica de Pplane7 se muestra en la Figura 3 en ella se escriben directamente las ecuaciones diferenciales, parámetros o expresiones, el rango de la ventana donde se dibuja el retrato de fase, es decir los valores máximos de las variables de estado y el número de puntos por renglón y columna.

Así, con los datos del ejemplo se obtiene el retrato de fase mostrado en la Figura 4.

En la figura 4 se puede observar fácilmente el punto de equilibrio en $(1, \frac{1}{4})$ para diferentes condiciones iniciales por

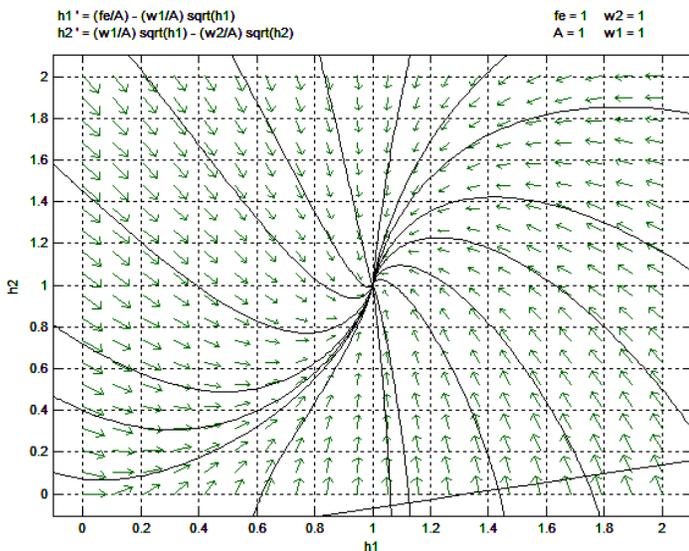


Fig. 4. Retrato de fase de sistema hidráulico de dos tanques.

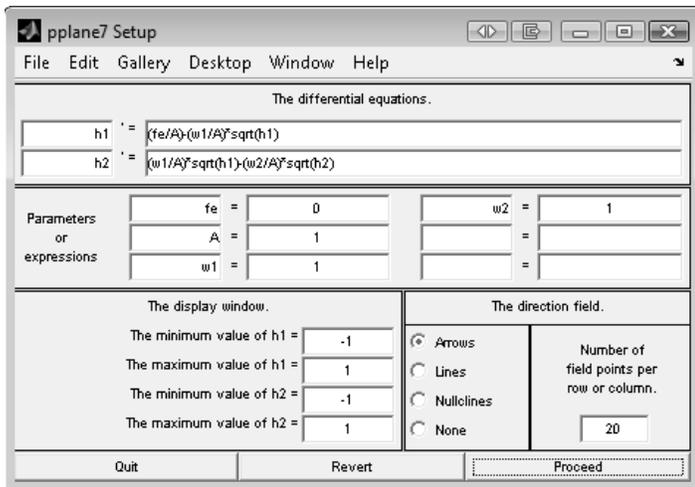


Fig. 5. Interfase gráfica de Pplane7 de MATLAB, para el sin entrada.

lo que este punto es un *NODO ESTABLE*, como se había definido a través del método analítico.

B. Sistema hidráulico sin entrada

Considérese un flujo de entrada cero y seguimos considerando el área de los dos tanques iguales y de magnitud unitaria. De igual manera para el factor de apertura en las dos válvulas, con lo cual los parámetros del modelo son: $A = 1, k_1 = 1, k_2 = 1$ y $f_e = 0$. Tal como se muestra en la interfaz gráfica de “Pplane7.m” en la Figura 5.

De manera similar al ejemplo anterior podemos hacer el análisis de este caso como se indica a continuación; para el sistema sin entrada el modelo (1)-(2) tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -\sqrt{h_1} \\ \dot{h}_2 &= \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \end{aligned} \tag{5}$$

Para encontrar el punto de equilibrio, las ecuaciones diferenciales se igualan a cero

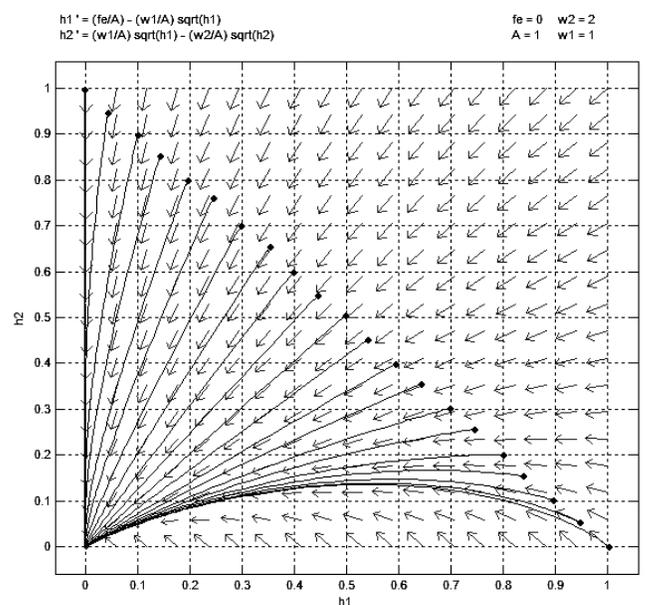


Fig. 6. Retrato de fase para diferentes condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} 0 &= -\sqrt{h_1} \rightarrow h_1 = 0 \\ 0 &= \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \rightarrow h_2 = 0 \end{aligned}$$

Así, es fácil ver que el punto de equilibrio (PE) se encuentra en (0,0), el cual es diferente al del caso anterior, con lo cual se demuestra la existencia de múltiples puntos de equilibrio en un sistema no lineal.

En el retrato de fase de la Figura 6 se observa la trayectoria para diferentes condiciones iniciales. Por ejemplo, para la condición inicial $h_1 = 1$ y $h_2 = 0$, el tanque 1 inicia con una altura unitaria y durante la evolución, hacia el origen, transfiere su volumen al tanque 2 con un factor de apertura en la válvula k_1 . El tanque 2 a su vez, desahoga su volumen quedándose finalmente ambos tanques con una altura de cero. Entonces cualquier trayectoria del retrato de fase terminará en el punto de equilibrio.

C. Sistema hidráulico con $f_e = 0.5$

Por otro lado, para un flujo de entrada constante $f_e = 0.5$, su diagrama de fase se muestra en la Figura 7. En éste se ilustra la nueva trayectoria de evolución del sistema y cómo el punto de equilibrio ha cambiado a $h_1 = 0.25$ y $h_2 = 0.25$.

El punto de equilibrio con entrada de flujo constante representa la permanencia constante de los estados en un punto diferente al origen. Para demostrar la estabilidad se considera la entrada $f_e = 0.5$, entonces las ecuaciones de estado se reescriben como

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \frac{1}{2} - \sqrt{h_1} \\ \dot{h}_2 &= \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \end{aligned} \tag{6}$$

Igualándolas a cero para obtener su punto de equilibrio

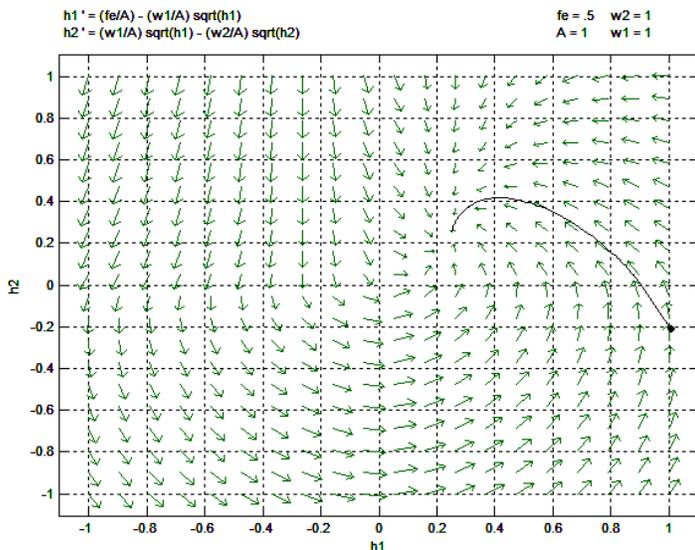


Fig. 7. Retrato de fase para el sistema de dos tanques con $f_e = 0.5$.

$$0 = 0.5 - \sqrt{h_1} \rightarrow h_1 = \left(\frac{f_e}{k_1}\right)^2 = \left(\frac{0.5}{1}\right)^2 = 0.25$$

$$0 = \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \rightarrow h_2 = \left(\frac{f_e}{k_2}\right)^2 = \left(\frac{0.5}{1}\right)^2 = 0.25$$

De igual manera que en el ejemplo 1, la metodología indica el empleo del Jacobiano (Teorema 1) y la evaluación del mismo en el punto de equilibrio.

$$A|_{PE} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dh_1} & \frac{df_1}{dh_2} \\ \frac{df_2}{dh_1} & \frac{df_2}{dh_2} \end{bmatrix}_{PE} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2h_1^{1/2}} & 0 \\ \frac{1}{2h_1^{1/2}} & -\frac{1}{2h_2^{1/2}} \end{bmatrix}_{(0.25, 0.25)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se desarrolla $\det(SI - A|_{PE})$.

$$\det(SI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)(s+1) = (s+1)^2$$

Es fácil de ver que los valores propios del sistema son reales y negativos, por lo tanto el punto de equilibrio es un NODO ESTABLE, como ya se había observado en el retrato de fase de la Figura 7.

V. CONCLUSIONES

La metodología para el análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas no lineales desde el punto de vista de Lyapunov, basados en el método directo como en el indirecto, permite obtener resultados formales de estabilidad con un cierto grado de dificultad; sobre todo al momento de la selección de la función de Lyapunov.

El retrato de fase diseñado usando “*Pplane7.m*” de Matlab® se presentan en este artículo como una alternativa

didáctica para demostrar gráficamente el análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas no lineales de segundo orden. Para lo cual se hace necesario mostrar una lista de los principales puntos de equilibrio que se pueden apreciar en este tipo de sistemas.

El ejemplo de aplicación utilizado (Sistema hidráulico no lineal de dos tanques interconectados) permite demostrar la efectividad de la metodología para el análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio, tanto en forma analítica como en forma gráfica. En el sistema de los dos tanques, el punto de equilibrio con entrada de flujo constante, representa la permanencia constante de los estados del sistema en un punto diferente al origen.

REFERENCIAS

- [1] Hassan. K. Khalil, “*Nonlinear systems*”, New Jersey, Prentice Hall, 2002.
- [2] T. Kailath, “*Linear Systems*”, New York, Prentice Hall, 1980.
- [3] M. Vidyasagar, “*Nonlinear Systems Analysis*”, Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [4] J.J.E. Slotine, W. Li, “*Applied Nonlinear Control*”, Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [5] F. Mazenc; S.I. Nucleescu, “*Lyapunov stability analysis for nonlinear delay systems*”, Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Volume 3, Issue , 2000 Page(s):2100 - 2105 vol.3.
- [6] Q. Jiang; S. Cheng; Y. Cao, “*Lyapunov stability analysis of turbine-generator including shaft system*”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, Volume 25, Number 9, November 2003 , pp. 741-746(6).
- [7] M.S Branicky, “*Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems*”, Automatic Control, IEEE Transactions on Volume 43, Issue 4, Apr 1998, pp: 475 – 482.
- [8] Daafouz, J. Riedinger, P. Iung, C., “*Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach*”, Automatic Control_IEEE Transactions on, Nov 2002, Volume: 47, pp:1883- 1887.
- [9] D. Shevitz, B. Paden, “*Lyapunov stability theory of nonsmooth systems*”, IEEE Transactions on Automatic Control, Sep 1994, Volumen 39, pp: 1910-1914.
- [10] A. Alzate, E. Giraldo Suarez, “*Aplicación de Controles Inteligentes sobre Sistemas no Lineales y Análisis de Estabilidad en el Plano de Fase*”, Scientia et Technica Año XII, No. 32, Diciembre 2006, pp. 169-174.
- [11] Z.G. Li, Y. C. Soh, C.Y. Wen, “*Robust Stability of a Class of Hybrid Nonlinear System*”, IEEE Trans on Automatic Control, Vol., 46, No. 6, June 2001, pp. 897-903.
- [12] J. Zhu, Y.P. Tian, “*Stabilizing Periodic Solution of Nonlinear Systems and Applications in Chaos Control*”, IEEE Trans on Circuits and Systems II, Vol., 52, No. 12, Dec 2005, pp. 870-874.



Juan Anzures Marín, Nació en el estado de Puebla en 1968, recibió el título de: Ingeniero Electricista por la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo en 1991; Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica opción instrumentación por la División de Estudios Superiores del Instituto Tecnológico de Chihuahua en 1997 y Dr. en Ciencias en Ingeniería Eléctrica opción Control Automático por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN,

CINVESTAV, Unidad Guadalajara en 2007. Es profesor de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana desde 1987 actualmente colabora en los programas Licenciatura y Posgrado de la misma Facultad. Sus áreas de interés son Instrumentación y Control de Sistemas así como el desarrollo de algoritmos para el diagnóstico de fallas en sistemas no lineales y Energy Harvesting.



José Aarón Padilla García. Nació en Cd. Lázaro Cárdenas Michoacán en 1978. Realizó sus estudios de Licenciatura en el Tecnológico de Lázaro Cárdenas, obtuvo el Título de Ingeniero Electrónico en el 2003, actualmente se encuentra realizando estudios de maestría en la división de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Sus áreas de interés son Instrumentación y control, Modelado en Bond

Graph y Robótica.



Omar Cuevas Silva. Nació en Cd. Lázaro Cárdenas Michoacán en 1981. Realizo sus estudios en el de Licenciatura en el Tecnológico de Lázaro Cárdenas, obtuvo el Título de Ingeniero Electrónico en el 2005, actualmente se encuentra realizando estudios de maestría en la división de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo. Sus áreas de interés son Sistemas Digitales, Programación Visual, Redes

Neuronales y Robótica.