

# Aplicación del Dominio Armónico Extendido al Análisis de Estado Quasi-Estacionario de los Sistemas Eléctricos de Potencia

Lázaro C. Isidro, Maldonado P. Jesús y Rico M. Jesús

**Resumen**— Este artículo presenta una técnica para analizar sistemas eléctricos de potencia en estado quasi-estacionario, en los cuales se incorporan cargas dinámicas no lineales en algunos de sus nodos, en particular motores de inducción. La técnica toma como base las series de Fourier, el principio de los fasores dinámicos y los conceptos de las matrices operacionales, herramientas que conforman lo que hoy en día se conoce como Dominio Armónico Extendido (DAE), en conjunto con el estudio de Flujos de Potencia. El DAE permite la conexión de una carga dinámica a un sistema de potencia de manera directa. La principal ventaja de esta técnica es el hecho de obtener una herramienta generalizada capaz de estudiar sistemas con las características antes mencionadas, los cuales a través de herramientas comerciales como el ATP (Alternative Transients Program) dificultarían su estudio, debido a que en general este tipo de sistemas tiene un comportamiento subamortiguado de larga duración. Además, mediante esta técnica se puede entre otras cosas detectar y estudiar las depresiones de voltaje, los cuales pueden ocurrir por la conexión repentina de grandes cargas en los sistemas eléctricos.

**Palabras clave**— Dominio Armónico Extendido, Fasores Dinámicos, Matrices Operacionales, Motor de Inducción, Series de Fourier.

## I. INTRODUCCIÓN

Hoy en día existe una gran cantidad de herramientas diseñadas para estudiar los sistemas eléctricos de potencia, con la finalidad de optimizar su operación, algunas de ellas se han desarrollado para el estudio de su estado dinámico, por ejemplo el ATP, cuya principal potencialidad es el análisis de los transitorios electromagnéticos que presentan una duración de tiempo alrededor de microsegundos. Otras se han desarrollado para el análisis del estado estable, tal es el caso de la herramienta de flujos de potencia, cuya solución proporciona el estado de operación del sistema para condiciones de carga constantes.

Manuscrito recibido el 11 de Febrero de 2008. Este trabajo fue respaldado por la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Lázaro C. Isidro hasta la fecha se ha desempeñado como Profesor e Investigador de Tiempo Completo de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo; Ave. Fco. J. Mújica S/N Col. Villa Universidad; Morelia, Mich., México; C.P. 58030; Tel: (443) 3223500, ext. 4354; Fax: (443) 3223500 ext. 1115.(e-mail [ilazaro@zeus.umich.mx](mailto:ilazaro@zeus.umich.mx))

Con la incorporación de cargas electromecánicas dinámicas, como son los motores de inducción, pueden resultar difíciles de estudiar a través de la primera alternativa, por el hecho de que su transitorio puede durar varios segundos o minutos. De igual forma utilizando la segunda opción, solo se tiene el estado del sistema en un punto de operación en particular (estado estable).

Lo anterior pone de manifiesto, la necesidad de una herramienta de estado quasi-estacionario, que permita el análisis de sistemas eléctricos con cargas dinámicas, donde se encuentren presentes fenómenos electromecánicos. Por lo tanto utilizando la segunda opción y tomando como base las series de Fourier se puede lograr una herramienta capaz de estudiar tales circuitos.

Si bien es cierto que los estudios dinámicos de cualquier sistema se pueden obtener a través de su modelo descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, la incorporación de nuevos elementos al sistema podría ocasionar modificaciones en las ecuaciones, por lo que difícilmente se tendría una generalización y resultaría impráctico su análisis, a pesar de que se tratara del mismo elemento pero ubicado en diferente lugar.

Por otro lado, la generalización del uso de los motores en el sector industrial y de servicios, así como el incremento del uso de cargas sensibles a las depresiones de voltaje, ponen de manifiesto el interés constante del estudio del motor conectado a los sistemas de potencia, ya que se ha demostrado que son uno de los principales elementos que producen estas depresiones [1], [2] y [3].

En este trabajo, se extiende el uso del DAE a problemas de análisis de estado quasi-estacionario, ya que el DAE fue diseñado para análisis de problemas de calidad de la energía. La técnica desarrollada se aplica en el estudio de sistemas eléctricos de potencia, que pueden incorporar en sus nodos dispositivos no lineales con un comportamiento dinámico, tal como el motor de inducción en su régimen transitorio. La técnica esta basada en el DAE [4], cuya principal ventaja es la obtención de una herramienta computacional generalizada capaz de resolver sistemas con las características antes mencionadas. Posteriormente, se describen las ecuaciones del motor de inducción bajo la técnica del DAE. Finalmente, se presenta un caso de estudio, donde se realiza el análisis del comportamiento del voltaje del nodo de prueba del sistema, así como algunos parámetros del motor. Los resultados en simulación se comparan con los obtenidos de

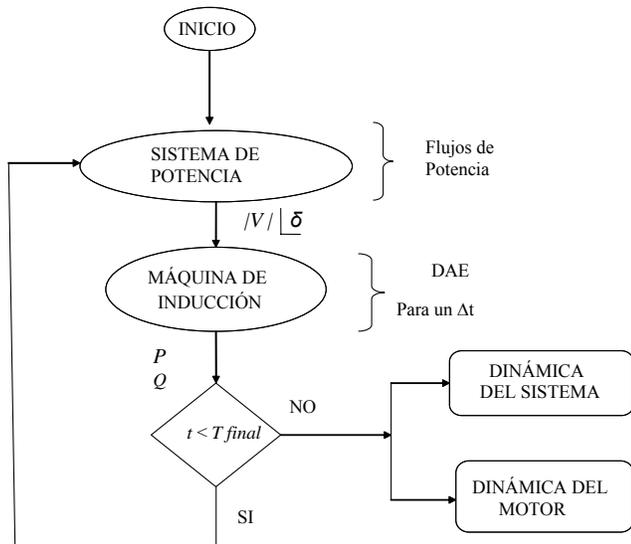


Fig. 1. Metodología de análisis.

un programa alterno realizado en Simulink, mismo que facilita un bloque prefabricado de la máquina de inducción.

## II. METODOLOGÍA

La técnica desarrollada para el análisis de sistemas eléctricos con cargas dinámicas en estado quasi-estacionario, por una parte, utiliza el método de flujos de potencia para observar el estado del sistema ante una condición de carga en particular, mientras que el comportamiento de la carga ante una excitación particular del sistema se realiza mediante el DAE. Por otro lado, como la carga es dinámica, entonces se realiza el proceso iterativo entre la condición que el sistema proporciona a la carga y ésta a su vez al sistema. La figura 1 muestra un diagrama esquemático alusivo a tal proceso iterativo, el cual presenta como carga un motor de inducción en régimen transitorio. Los pasos que hacen referencia a la figura 1, se describen a continuación:

- i) Calcular el estado de operación del sistema eléctrico, con la ayuda de un programa de flujos de potencia convencional, esto con la finalidad de obtener el voltaje (magnitud  $|V|$  y ángulo  $\delta$ ), el cual servirá como excitación para el motor durante un instante de tiempo.
- ii) Con el voltaje calculado en el paso i), se debe simular la dinámica del motor de inducción, para un pequeño instante de tiempo, usando para ello el DAE.
- iii) En base al voltaje de alimentación y los resultados de las corrientes demandadas por el motor se calculan las demandas de potencia activa ( $P$ ) y reactiva ( $Q$ ), las cuales corresponden al instante de tiempo simulado.
- iv) Con las potencias calculadas, se actualizan las demandas de potencia en el nodo de conexión y se continúa con el paso i).

Este procedimiento se repite hasta que se concluya el periodo de estudio seleccionado. De los resultados obtenidos se puede observar por parte del sistema de potencia: el nivel de voltaje en cada uno de sus nodos, información que es útil para la detección de depresiones de voltaje. Mientras que del

motor de inducción algunos de los parámetros observables son: corriente en el estator, así como el comportamiento dinámico de las componentes armónicas que la integran, tales como: velocidad del motor, potencia demandada del sistema (Real y Reactiva), características par-velocidad entre otras.

## III. DOMINIO ARMÓNICO EXTENDIDO

El Dominio Armónico Extendido, es una metodología de propósito general, constituye una alternativa de solución para cualquier sistema descrito a través de ecuaciones de estado. Esta metodología en su formulación básica utiliza las cualidades de las series ortogonales, el concepto de fasores dinámicos, así como las matrices operacionales. A continuación se presenta una breve descripción de las herramientas utilizadas.

### A. Series ortogonales

Cualquier función  $f(t)$  que es absolutamente integrable en el intervalo  $[0,1)$ , puede ser representada aproximadamente por una serie o combinación lineal de  $m$  términos ortogonales como:

$$f(t) = \sum_0^{m-1} a_i T_i(t) \quad (1)$$

Donde  $T_i(t)$  son los elementos de la función base asociada descrita en términos generales por (2), donde  $T$ , indica la transpuesta.

$$\mathbf{T}(t) = [T_0(t) \ T_1(t) \ \dots \ T_{m-1}(t)]^T \quad (2)$$

Y los coeficientes  $a_i$  de la serie se determinan por:

$$a_i = \int_0^1 T_i(t) f(t) dt \quad (3)$$

Cabe señalar que la aproximación depende del número de términos tomados para cada serie.

### B. Fasores dinámicos

Un fasor es un número complejo que contiene magnitud y ángulo de fase, se aplica en la representación de funciones en el tiempo. Cuando se hacen aproximaciones mediante una serie ortogonal en particular, el coeficiente de la serie es de magnitud invariante, por lo que la magnitud del fasor que se forma es constante. Si la aproximación se lleva a cabo desplazando el inicio de la ventana de integración un tiempo  $t$ , quedando el intervalo  $[t, t+1]$ , donde  $l$  es el periodo de la función y  $t$  varía de 0 hasta un tiempo determinado, entonces (3) se convierte en un fasor dinámico dentro del intervalo considerado que se escribe como:

$$a_i(t) = \frac{1}{l} \int_t^{t+l} T_i(\tau) f(\tau) dt \quad (4)$$

Por lo tanto, la aproximación de funciones mediante series ortogonales, representada ahora con fasores dinámicos se expresa como:

$$f(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(t) T_i(\tau) dt \quad (5)$$

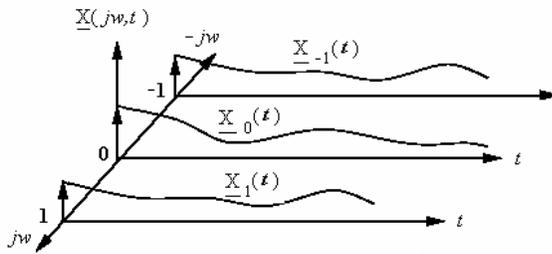


Fig. 2. Componentes armónicos variantes en el tiempo.

Escribiendo (5) en forma matricial se obtiene:

$$f(\tau) = A(t)\mathbf{T}(\tau) \quad (6)$$

donde:

$$A(t) = [\alpha_0(t) \quad \alpha_1(t) \quad \cdots \quad \alpha_{m-1}(t)] \quad (7)$$

$$\mathbf{T}(\tau) = [T_0(t) \quad T_1(t) \quad \cdots \quad T_{m-1}(t)]^T \quad (8)$$

En la figura 2 se muestra la variación de los armónicos en el tiempo de una señal arbitraria. Se aprecia que la señal esta formada por la componente de frecuencia cero y la fundamental o primera armónica. Esta variación se logra obteniendo los coeficientes armónicos de la señal, mediante un barrido a través de una ventana fija, hasta concluir con el periodo seleccionado. Una mayor referencia de lo anterior esta documentada en [5], [6], [7] y [8].

### C. Matrices Operacionales

Son consideradas como matrices operacionales la matriz de Integración ( $\mathbf{P}$ ) y la de Diferenciación ( $\mathbf{D}$ ), las cuales con ayuda de matrices auxiliares como son la matriz Producto

( $\hat{\mathbf{T}}$ ) y de Coeficientes ( $\mathbf{C}$ ), permiten realizar el cálculo operacional. La principal ventaja de las matrices operacionales, es la conversión de un sistema de ecuaciones diferenciales a un sistema de ecuaciones algebraicas, simplificando así el problema para el análisis y/o control. En [9], se encuentra una definición clara de cada una de éstas en diferentes dominios.

$$\int_0^t \mathbf{T}(\tau) d\tau \cong \mathbf{P}\mathbf{T}(t) \quad (9)$$

$$p(\mathbf{T}(t)) \cong \mathbf{D}\mathbf{T}(t) \quad (10)$$

donde:  $p = \frac{d}{dt}$

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{T}^T(t) \quad (11)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{T}(t) = \left[ \hat{\mathbf{T}}(t) \right] \mathbf{c} \quad (12)$$

Donde  $\mathbf{c}$  es el vector de coeficientes armónicos obtenido en la aproximación de una función en particular.

### D. Formulación del DAE para Sistemas Lineales

La formulación general del DAE para Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (SLIT) y Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (SLVT), puede ser descrita considerando un sistema lineal de primer orden con

coeficientes periódicos en el tiempo, donde en general estos sistemas están dados por (13), donde la parte esencial a considerar es la aproximación a través de fasores dinámicos de una función cuyo comportamiento es periódico, es decir  $f(t) = f(t+l)$ .

$$p(x(t)) = a(t)x(t) + b(t)u(t) ; \quad x(0) = x_0 \quad (13)$$

Así, utilizando la idea de fasores dinámicos en los términos de (13), se tiene:

$$x(\tau) = \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{x}(t) \quad (14)$$

y aplicando la derivada a (14) se tiene:

$$p(x(t)) = p(\mathbf{T}^T(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}^T(t)p(\mathbf{x}(t)) \quad (15)$$

y usando (10) se llega a:

$$p(x(t)) = \mathbf{T}^T(t)\mathbf{D}\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}^T(t)p(\mathbf{x}(t)) \quad (16)$$

Por otro lado aplicando la idea de fasores dinámicos al coeficiente periódico  $a(t)$ , se tiene:

$$a(\tau) = \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{a}(t) \quad (17)$$

por lo tanto el producto  $a(\tau)x(\tau)$ , queda como:

$$a(\tau)x(\tau) = \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{a}(t)\mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{x}(t) \quad (18)$$

como  $\mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{x}(t)$  representa un escalar, entonces:

$$a(\tau)x(\tau) = \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{x}(t)\mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{a}(t) \quad (19)$$

Además, la transpuesta de un escalar sigue siendo el mismo escalar, se tiene que:

$$a(\tau)x(\tau) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{T}(\tau)\mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{a}(t) \quad (20)$$

Aplicando (11), la ecuación (20) se transforma en:

$$a(\tau)x(\tau) = \mathbf{x}^T(t)\hat{\mathbf{T}}(\tau)\mathbf{a}(t) \quad (21)$$

Finalmente aplicando (12) en (21) se obtiene:

$$a(\tau)x(\tau) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{A}\mathbf{T}(\tau) \quad (22)$$

donde  $\mathbf{A}$  es una matriz de coeficientes constantes y todo el lado derecho de (22) es un escalar, por lo tanto se puede reescribir como:

$$a(\tau)x(\tau) = \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{A}^T\mathbf{x}(t) \quad (23)$$

Si siguiendo el mismo procedimiento para el producto  $b(t)u(t)$ , se obtiene: que el lado derecho de (13) es:

$$a(t)x(t) + b(t)u(t) = \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{A}^T\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{B}^T\mathbf{u}(t) \quad (24)$$

Obsérvese que sustituyendo (15) y (24) en (13), se puede eliminar la dependencia del tiempo, resultando la ecuación como:

$$\mathbf{D}\mathbf{x}(t) + p(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{A}^T\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^T\mathbf{u}(t) \quad (25)$$

por lo tanto acomodando la expresión se obtiene:

$$p(\mathbf{x}(t)) = [\mathbf{A}^T - \mathbf{D}]\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^T\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_{k0} \quad (26)$$

La ecuación (26), representa a un sistema lineal invariante en el tiempo en un nuevo espacio de estado, cuya solución proporcionan la información completa del comportamiento de las armónicas en el tiempo de las variables de estado y está contenida en el vector  $\mathbf{x}(t)$ .

TABLA I. CONSTANTES DEL MOTOR

$a_{11} = \frac{r_s L_r}{\alpha_0} = a_{22}$	$a_{12} = \frac{M^2}{\alpha_0} = -a_{21}$	$a_{13} = -\frac{r'_r M}{\alpha_0} = a_{24}$
$a_{14} = \frac{M L_r}{\alpha_0} = -a_{23}$	$a_{31} = -\frac{r_s M}{\alpha_0} = a_{42}$	$a_{32} = -\frac{M L_s}{\alpha_0} = -a_{41}$
$a_{33} = \frac{r'_r L_s}{\alpha_0} = a_{44}$	$a_{34} = -\frac{L_s L_r}{\alpha_0} = -a_{43}$	$a_{51} = \frac{3 n_{pol}^2 M}{8J} = -a_{53}$
$b_{11} = -\frac{L_r}{\alpha_0} = b_{21}$	$b_{31} = \frac{M}{\alpha_0} = b_{41}$	$b_{51} = -\frac{4 n_{pol}}{8J}$

Por otro lado, el producto de tres funciones arbitrarias en el espacio armónico puede obtenerse siguiendo un procedimiento similar al anterior, a partir del cual se obtiene:

$$a(\tau)x(\tau)y(\tau) = \mathbf{T}^T(\tau) \mathbf{Y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}(t) \quad (27)$$

#### IV. MOTOR DE INDUCCIÓN EN TÉRMINOS DEL DAE

El modelo matemático que describe el comportamiento del motor de inducción esta dado por el conjunto de ecuaciones diferenciales (28-32), donde  $p$  es la derivada respecto al tiempo, los subíndices  $s, r$ , hacen referencia a los parámetros del estator y rotor respectivamente y los parámetros del rotor vistos en terminales del estator se indica con  $(\cdot)$ . Este modelo tiene como variables de estado las corrientes y la velocidad del rotor, en un marco de referencia estacionario de coordenadas  $dq0$  ( $\omega = 0$ ,  $i_{0s} = 0$ ,  $i'_{0r} = 0$ ,  $v_{0s} = 0$ ) y es una simplificación del modelo presentado en [10].

$$p(i_{qs}) = a_{11}i_{qs} + a_{12}i_{ds}\omega_r + a_{13}i'_{qr} + a_{14}i'_{dr}\omega_r + b_{11}v_{qs} \quad (28)$$

$$p(i_{ds}) = a_{21}i_{qs}\omega_r + a_{22}i_{ds} + a_{23}i'_{qr}\omega_r + a_{24}i'_{dr} + b_{21}v_{ds} \quad (29)$$

$$p(i'_{qr}) = a_{31}i_{qs} + a_{32}i_{ds}\omega_r + a_{33}i'_{qr} + a_{34}i'_{dr}\omega_r + b_{31}v_{qs} \quad (30)$$

$$p(i'_{dr}) = a_{41}i_{qs}\omega_r + a_{42}i_{ds} + a_{43}i'_{qr}\omega_r + a_{44}i'_{dr} + b_{41}v_{ds} \quad (31)$$

$$p(\omega_r) = a_{51}i_{qs}i'_{dr} + a_{52}i_{ds}i'_{qr} + b_{51}T_L \quad (32)$$

Donde las constantes  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$  están dadas por la tabla I. donde:

$$\alpha_0 = M^2 - L_s L_r \quad (33)$$

Los símbolos  $r, n_{pol}, J, M, L, T_L$  representan a la resistencia de los devanados, número de polos, momentos de inercia, inductancia mutua, la inductancia de los devanados y

el par de carga, respectivamente. Los subíndices  $s$  y  $r$ , hacen la distinción entre los parámetros del estator y el rotor.

Al aplicar el principio de la aproximación de funciones a través de los fasores dinámicos, así como de los operadores matriciales, el conjunto de ecuaciones (28-32), se transforma en (34,38).

$$p(\mathbf{i}_{qs}) = (\mathbf{A}_{11}^T - \mathbf{D})\mathbf{i}_{qs} + \varpi_r^T \mathbf{A}_{12}^T \mathbf{i}_{ds} + \mathbf{A}_{13}^T \mathbf{i}'_{qr} + \varpi_r^T \mathbf{A}_{14}^T \mathbf{i}'_{dr} + \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{v}_{qs} \quad (34)$$

$$p(\mathbf{i}_{ds}) = \varpi_r^T \mathbf{A}_{21}^T \mathbf{i}_{qs} + (\mathbf{A}_{22}^T - \mathbf{D})\mathbf{i}_{ds} + \varpi_r^T \mathbf{A}_{23}^T \mathbf{i}'_{qr} + \mathbf{A}_{24}^T \mathbf{i}'_{dr} + \mathbf{B}_{21}^T \mathbf{v}_{ds} \quad (35)$$

$$p(\mathbf{i}'_{qr}) = \mathbf{A}_{31}^T \mathbf{i}_{qs} + \varpi_r^T \mathbf{A}_{32}^T \mathbf{i}_{ds} + (\mathbf{A}_{33}^T - \mathbf{D})\mathbf{i}'_{qr} + \varpi_r^T \mathbf{A}_{34}^T \mathbf{i}'_{dr} + \mathbf{B}_{31}^T \mathbf{v}_{qs} \quad (36)$$

$$p(\mathbf{i}'_{dr}) = \varpi_r^T \mathbf{A}_{41}^T \mathbf{i}_{qs} + \mathbf{A}_{42}^T \mathbf{i}_{ds} + \varpi_r^T \mathbf{A}_{43}^T \mathbf{i}'_{qr} + (\mathbf{A}_{44}^T - \mathbf{D})\mathbf{i}'_{dr} + \mathbf{B}_{41}^T \mathbf{v}_{ds} \quad (37)$$

$$p(\boldsymbol{\omega}_r) = \mathbf{I}'_{dr}^T \mathbf{A}_{51}^T \mathbf{i}_{qs} + \mathbf{I}'_{qr}^T \mathbf{A}_{52}^T \mathbf{i}_{ds} - \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_r + \mathbf{B}_{51}^T \mathbf{T}_L \quad (38)$$

El conjunto (34-38), representan al modelo del motor de inducción en términos del DAE, donde la solución de éste sistema de ecuaciones, muestra el comportamiento dinámico de los armónicos en el tiempo para cada una de las variables de estado. Por lo tanto para ver el valor de las variables de estado, se deben multiplicar los resultados anteriores por las funciones base. Por otro lado, las matrices  $\mathbf{A}_{mk}^T = a_{mk} \mathbf{I}$ , son de coeficientes constantes y de tamaño  $[2nh+1 \times 2nh+1]$ , donde  $\mathbf{I}$ , es una matriz identidad y  $nh$  es el número de armónicas seleccionadas para la aproximación vía series de Fourier. En este caso también  $\mathbf{T}_L$  representa un vector, mientras que  $\varpi_r$ , es una matriz de coeficientes formada con las componentes armónicas del vector de velocidad  $\boldsymbol{\omega}_r$ . Finalmente, las matrices de coeficientes de las variables de estado de las corrientes y la velocidad, deben calcularse para cada instante de tiempo en el que se obtiene la solución, siendo éstas constantes sólo hasta el estado estable.

Utilizando los voltajes de alimentación y los resultados de las corrientes, el cálculo de potencia demandada por el motor de inducción y en general de cualquier carga se realiza mediante [11] y [12]:

$$P = \sum_{m=-nh}^{nh} V_m I_{-m} \quad (39)$$

$$Q = \sqrt{\sum_{m=-nh}^{nh} (|V_m|^2 |I_m|^2 - V_m I_{-m} V_m I_{-m})} \quad (40)$$

Donde el voltaje y corriente están en el dominio armónico y  $nh$  es el número de coeficientes de Fourier seleccionados.

#### V. CASO DE ESTUDIO

En este apartado se muestra un caso de estudio de un sistema de potencia donde se le conectan dos diferentes motores de inducción en uno de sus nodos, la aproximación con el DAE se realiza con sólo la componente de CD y la

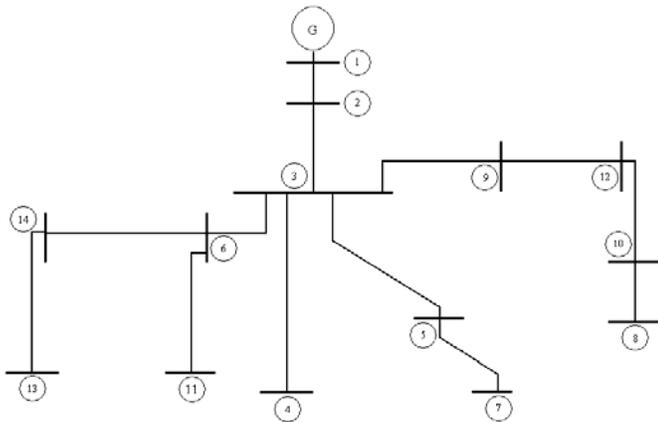


Fig. 3 Sistema eléctrico de prueba.

TABLA II. DATOS DEL SISTEMA ELÉCTRICO DE PRUEBA.

Nodo emisor	Nodo receptor	Impedancia serie $Z_{serie}$		$Y_p/2$ , pu	Tap
		$R, pu$	$X, pu$		
1	2	0.001510	0.002960	0	1
2	3	0.006670	0.005330	0	1
3	9	0.004440	0.001610	0	1
3	5	0.007000	0.000908	0	1
3	4	0.014600	0.001900	0	1
3	6	0.002570	0.001130	0	1
5	7	0.046400	0.348000	0	1
6	11	0.458000	0.367000	0	1
6	14	0.018900	0.005760	0	1
10	8	0.058200	0.024300	0	1
9	12	0.003550	0.000461	0	1
12	10	0.529000	0.450000	0	1
14	13	0.024400	0.147000	0	1

TABLA III. DATOS DEL SISTEMA ELÉCTRICO; TIPO DE NODO, POTENCIA GENERADA Y DEMANDADA EN P.U.

Núm. Nodo	Tipo de Nodo	$P_g, pu$	$Q_g, pu$	$P_d, pu$	$Q_d, pu$
1	S	1.60	1.00	0.0000	0.0000
2	C	0.00	0.00	0.0000	0.0000
3	C	0.00	0.00	0.0000	0.0000
4	C	0.00	0.00	0.0001	0.0005
5	C	0.00	0.00	0.2000	0.4000
6	C	0.00	0.00	0.0000	0.0000
7	C	0.00	0.00	0.0015	0.0085
8	C	0.00	0.00	0.0200	0.0070
9	C	0.00	0.00	0.0000	0.0000
10	C	0.00	0.00	0.0120	0.0007
11	C	0.00	0.00	0.0125	0.0080
12	C	0.00	0.00	0.0000	0.0000
13	C	0.00	0.00	0.0320	0.0019
14	C	0.00	0.00	0.0000	0.0000

TABLA IV. PARÁMETROS DE LOS MOTORES DE INDUCCIÓN.

PARÁMETRO	MOTOR DE INDUCCIÓN	
	3 Hp	2250 Hp
Voltaje [V]	220	2300
Velocidad [rpm]	1710	1786
Par Base [Nm]	11.9	8900
Corriente Base [A]	5.8	421.2
Resistencia estatórica [ $\Omega$ ]	0.435	0.029
Resistencia Rotatórica [ $\Omega$ ]	0.816	0.022
Resistencia de fuga Estatórica [ $\Omega$ ]	0.754	0.226
Resistencia de fuga Rotatórica [ $\Omega$ ]	0.754	0.226
Reactancia de Magnetización [ $\Omega$ ]	26.13	13.04
Constante de Inercia $J$ [ $kgm^2$ ]	0.089	63.87

fundamental. El sistema de prueba es una red de 14 nodos representada por la figura 3.

La tabla II muestra la información de los parámetros de las líneas del sistema, expresados en valores en por unidad (p.u.), con una base de 10 MVA.

En la tabla III, se muestra la información del tipo de nodo del sistema, así como las potencias demandadas e inyectadas al sistema, dadas en por unidad. Donde la letra S indica que el nodo es un nodo compensador, mientras que la C manifiesta que se trata de un nodo de carga. Por otro lado, los parámetros de los motores de inducción que se conectarán al sistema están reportados en la tabla IV.

En el primer caso de estudio se coloca en el nodo 5 del sistema de eléctrico un motor de inducción de 3HP. El motor inicialmente se encuentra estático y se le coloca una carga mecánica en su eje, equivalente a 10 Nm. Para la solución del motor vía DAE se utilizan 3 armónicas y el número de términos con considerados para el muestreo de la señal son  $mt = 64$ . La figura 4, muestra una comparación del

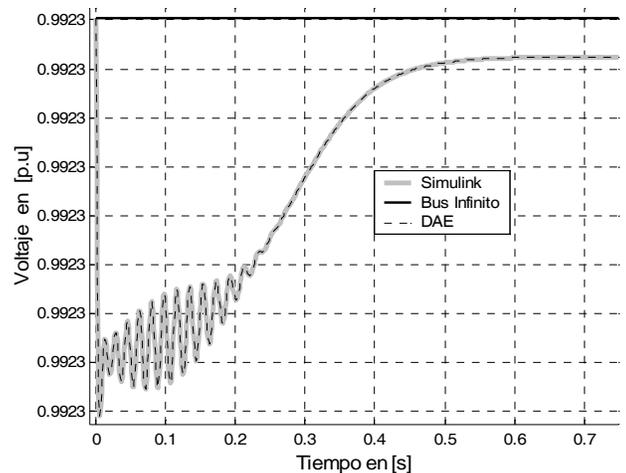


Fig. 4. Voltaje del sistema con un motor de 3 HP.

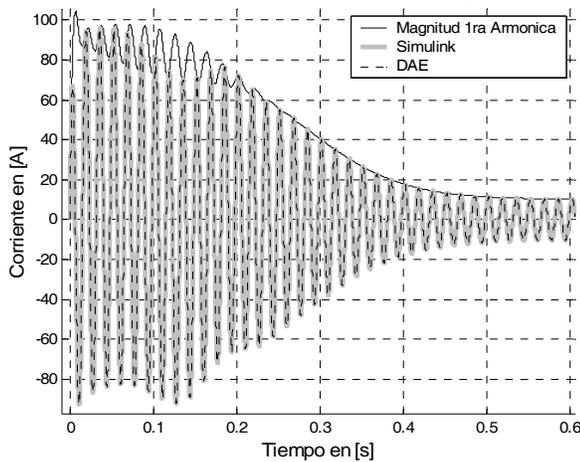


Fig. 5. Corriente demandada por el motor de 3 HP.

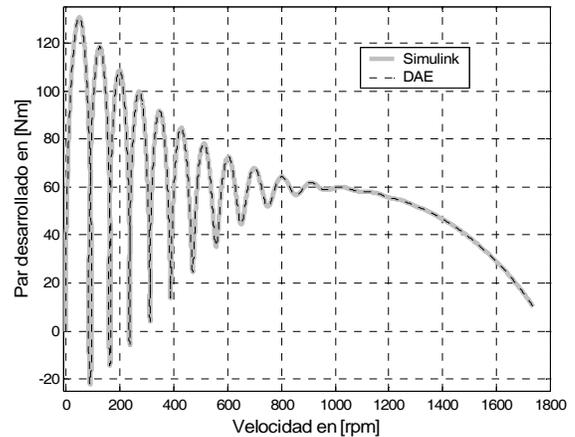


Fig. 7. Curva par-velocidad con una carga de 10 Nm.

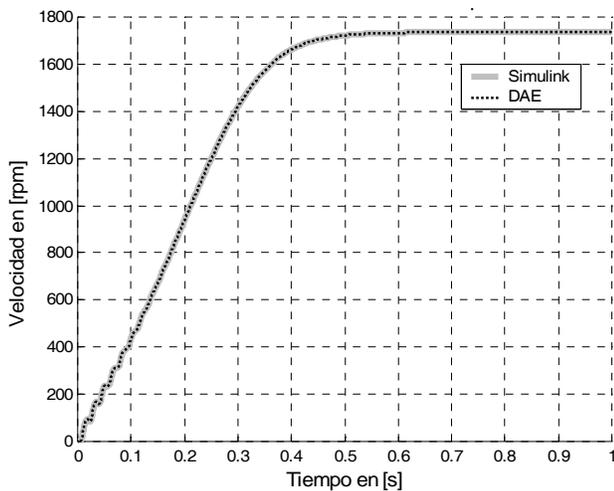


Fig. 6. Velocidad del motor con una carga de 10 Nm.

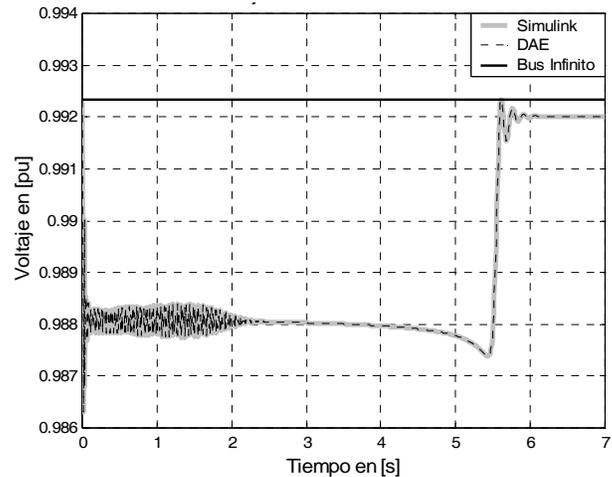


Fig. 8. Magnitud del voltaje en el nodo 5 al colocar un motor de 2250HP, con una carga  $T_L=2000Nm$ .

comportamiento del voltaje en el nodo 5 del sistema con su valor nominal (Bus infinito), ante la conexión de dicho motor. Se observa que la caída de voltaje ocasionada por la conexión de este motor, no tiene gran significado, prácticamente es despreciable.

Por otro lado, la corriente que el motor esta demandando del sistema, se puede apreciar en la figura 5, donde además de la técnica del DAE se logra observar el comportamiento de la magnitud de la componente fundamental que participa en la formación de esta señal, donde se aprecia que es prácticamente su envolvente, por lo que la participación de las demás componentes (cd, 2da, 3ra, etc.) es prácticamente nula.

En la figura 6, se presenta el comportamiento de la velocidad del motor, en donde se puede observar que la curva arrojada por la técnica del DAE es prácticamente la misma que la obtenida al utilizar el bloque prefabricado del MatLab®.

Por otro lado en la figura 7, muestra la característica del par desarrollado en función de la velocidad del motor, nuevamente las diferencias entre los resultados es mínima.

Como segundo caso de estudio, se considera el nodo 5 como el de prueba, pero ahora se conecta un motor de

inducción de 2250 HP, donde los parámetros para este motor son los mostrados en la tabla IV. La carga mecánica conectada al eje del motor es de 2000 Nm, para la simulación se consideran las 3 primeras componentes armónicas, además de utilizar  $mt=64$  para la solución.

La figura 8, muestra las características del voltaje en el nodo 5, donde se puede observar que el voltaje del sistema sufre una depresión de voltaje que por un instante de tiempo llega a un valor de 0.986 p.u, misma que por las características de operación del motor se mantiene a un voltaje de operación de aproximadamente 0.988 p.u.; una vez que el motor alcanza su velocidad nominal el voltaje en el sistema se recupera hasta prácticamente el voltaje inicial.

En la figura 9 se muestra la corriente del estator junto con su envolvente, la cual esta formada por la componente fundamental, en donde se puede apreciar que durante todo el transitorio la corriente es una senoide de valor pico aparentemente constante, lo que pone al motor en condiciones críticas de operación, así mismo, se observa que el motor llega al estado estable en el tiempo en el cual se recupera el voltaje.

La figura 10, muestra el comportamiento de la velocidad para estas condiciones de operación. Obsérvese nuevamente

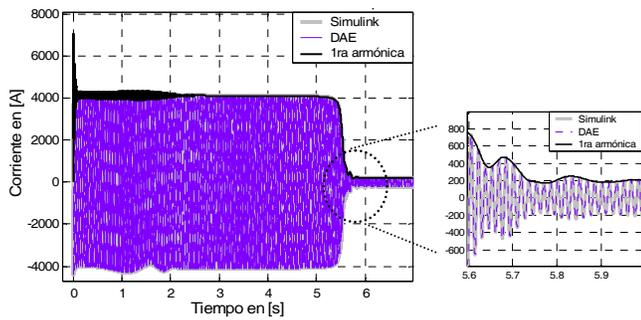


Fig. 9. Corriente del estator del motor de 2250HP, con  $T_L = 2000Nm$ , conectado al nodo 5 del SEP.

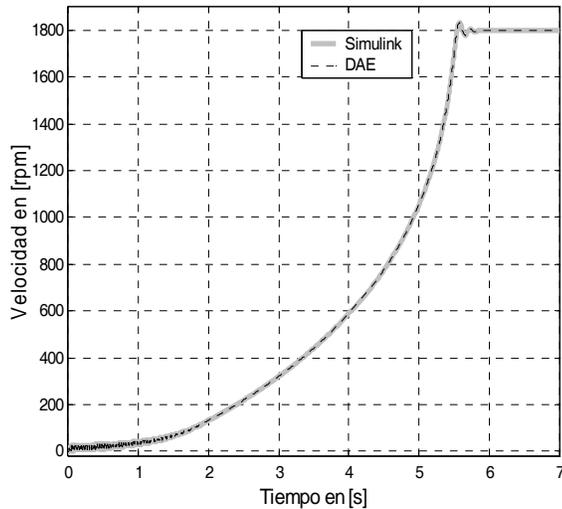


Fig. 10. Velocidad de un motor de 2250HP con  $T_L = 2000Nm$ ,

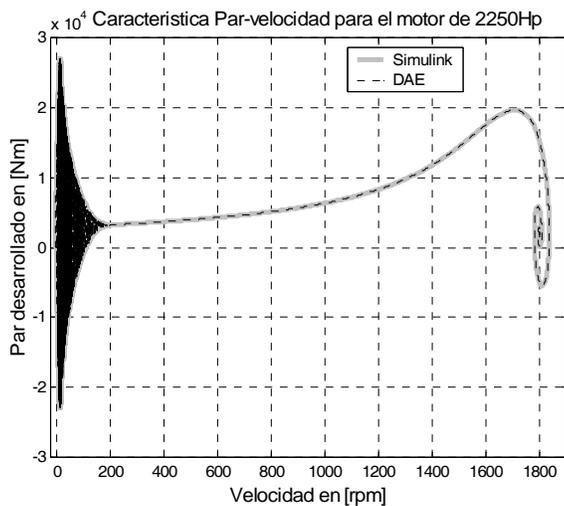


Fig. 11. Par-velocidad del motor de inducción de 2250HP, con  $T_L = 2000Nm$ , conectado al nodo 5 del SEP.

que el tiempo en que el motor llega al estado estable coincide con el tiempo en el cual se recupera el voltaje. En la figura 11 muestra el comportamiento del par en función con la velocidad, se observa que para algunos valores del par, la velocidad está por encima de la velocidad de sincronía, esto puede llegar a suceder en motores de gran capacidad y se atribuye a la inercia de la masa del rotor.

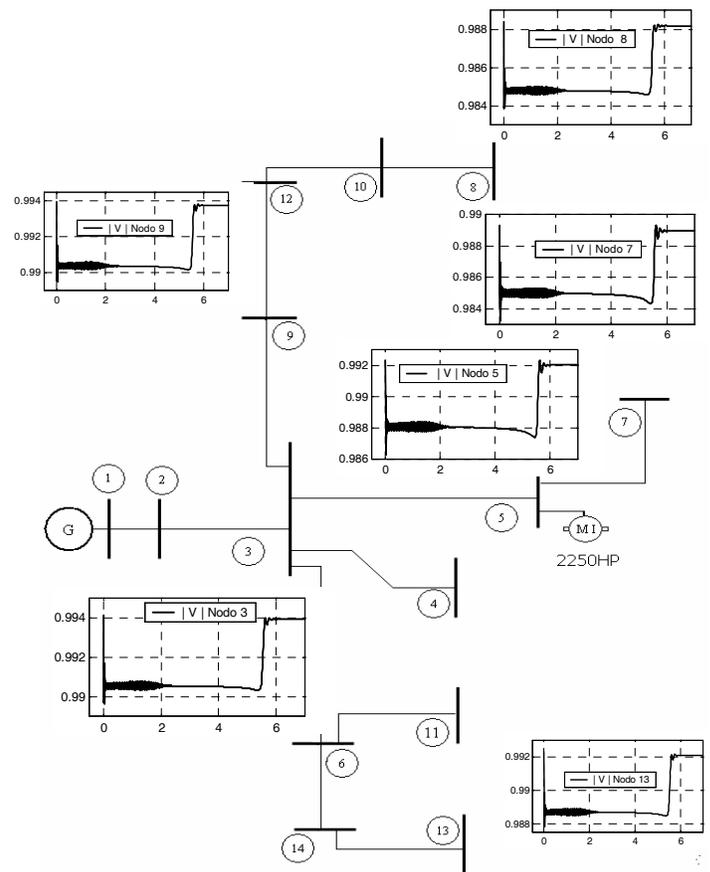


Fig. 12. Voltajes nodales en pu, ante un motor de 2250HP con  $T_L = 2000Nm$  conectado en el nodo 5.

Finalmente, en la figura 12 se presenta el voltaje del sistema en algunos de sus nodos con la finalidad de observar la propagación de las depresiones.

## VI. CONCLUSIONES

En este artículo se muestra una técnica basada en series de Fourier para estudiar el impacto de motores de gran capacidad en redes eléctricas de distribución. El modelo considera que las ecuaciones del motor de inducción sean representadas en el dominio armónico extendido, donde las variables de estado son los coeficientes de Fourier dependientes del tiempo de las variables de estado en la formulación convencional en coordenadas dq0. Una característica sobresaliente de esta transformación es que las variables de estado en el dominio armónico extendido evolucionan más lentamente que las variables de estado en las coordenadas dq0. Esto permite eficientar los métodos de integración numérica utilizados en nuestra propuesta. Por ejemplo, es posible utilizar pasos de integración mayores reduciendo el costo computacional. En el modelo propuesto la red de distribución es analizada mediante flujos monofásicos pero el modelo puede incorporar la formulación trifásica sin mayores esfuerzos.

Los resultados obtenidos con las técnicas propuestas muestran coincidencia con modelos convencionales. En este

caso nuestro modelo ha sido validado con los modelos del motor de inducción proporcionados en Simulink MatLab ®.

### REFERENCIAS

- [1] K.H. Chan, M. Madrigal, "Phase Domain Analysis of Conventional and Advanced Static Var Compensator in Voltage Sag due to Motor Start-Up", *Power and Energy Systems*, July 2001, pp. 394-400.
- [2] J. Cardona, J. P. Barros, "ATP Prediction of Voltage Sag Effect on Sensitive Loads", presented at the 2006 International Conference on renewable energy and power quality, ICREPQ'06, Palma de Mallorca, España.
- [3] J. J. Perez, C. A. Cortes, A. Gomez, "A study of voltage sags in electric motors", presented at the 9th International Conference on Electrical Power Quality and Utilisation. EPQU 2007, Barcelona, España.
- [4] J. J. Rico, M. Madrigal and E. Acha, "Dynamic Harmonic Evolution Using the Extended Harmonic Domain", *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 18, No 2, pp. 587-594, April 2003.
- [5] B. Grčar, M. Žnidarič, A.M. Stanković, "Dynamic Phasors in Power System Analysis and Protection Design", presented at the 12-th Intl. Conf. on Power System Protection PSP2000, Bled, Slovenia, Sep. 2000, pp. 207-212.
- [6] A. M. Stankovic, B. C. Lesieutre T. Aydin, "Modeling and Analysis of Single-Phase Induction Machines with Dynamic Phasors", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 14, No. 1 February 1999.
- [7] J. Maldonado, "Análisis del Arranque de Motores de Inducción de Gran Capacidad Conectados a Redes de Distribución usando el Dominio Armónico Extendido", Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica UMSNH, Octubre 2005.
- [8] W. Yao, J. Wen and H. He, "Modeling and Simulation of VSC-HVDC with Dynamic Phasors", presented at the Third International Conference on Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies, Nanjing, China, April 6-9, 2008, DRPT2008.
- [9] I. Lázaro, J. J. Rico, G. T. Heydt, "Analysis of Switching Loads in Networks Using Operacional Matrices", *IEEE Power Review*, Vol. 20, Num. 3, March 2000.
- [10] P. C. Krause, *Análisis of Electric Machinery*, IEEE Press, New York, 1995.
- [11] E. Acha, M. Madrigal, *Power Systems Harmonics, Computer Modelling and Analysis*, John Wiley & Sons, 2001.
- [12] M. Madrigal, "Modelling of Power Electronics Controllers for Harmonics Analysis in Power Systems", Ph. D thesis, University of Glasgow, Scotland, U.K., 2001.



libro Ingeniería de Sistemas de Control Continuo. Sus áreas de interés son Calidad de la Energía, Electrónica de Potencia, Control e Instrumentación.



**Jesús Maldonado Paleo** nació en Uruapan Michoacán, México. Recibió el grado de Ingeniero Electricista en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, el grado de maestro en Ingeniería Eléctrica en la misma Institución en 2002 y 2005. Actualmente labora como profesor en el sector educativo. Sus áreas de interés son Calidad de la Energía, Control e Instrumentación.



**J. Jesús Rico Melgoza** nació en Purépero, Michoacán, México. Recibió el grado de Ingeniero Electricista en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica en la Universidad de Nuevo León y el Grado de Doctor en al Universidad de Glasgow en 1990, 1993 y 1997 respectivamente. En 1999 realizó una estancia postdoctoral en la Universidad Estatal de Arizona. Actualmente es Profesor Investigador del Programa de Graduados de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la UMSNH. Sus áreas de interés son Calidad de la Energía, Armónicas, Análisis e Identificación de Parámetros.