ROMPIENDO BARRERAS:

Avances y desafíos en la enseñanza de ingeniería y matemáticas en América Latina

Jesús Eduardo Hinojos Ramos
COORDINADOR

ITSON®
UNIVERSIDAD

ROMPIENDO BARRERAS:
Avances y desafíos en la enseñanza de ingeniería y matemáticas en América Latina

Jesús Eduardo Hinojos Ramos
Coordinador

Instituto Tecnológico de Sonora
5 de febrero, No. 818 sur, colonia Centro
Ciudad Obregón, Sonora, México; 85000
www.itson.mx
Email: *rectoria@itson.mx*
Teléfono: (644) 410-90-00

Primera edición
Marzo, 2024
ISBN para ebook: 978-607-609-247-7

Gestión editorial y maquetación
Marisol Cota Reyes
Oficina de publicaciones ITSON
marisol.cota@itson.edu.mx

Cubierta diseñada en Freepik

La presente publicación ha sido dictaminada por pares académicos expertos en el tema.

Cómo citar un capítulo de este libro (se muestra ejemplo de capítulo I):
Cajas, F. (2024). *El nuevo currículum de Ingeniería*. En Hinojos, J. (Ed.). Rompiendo barreras: Avances y desafíos en la enseñanza de ingeniería y matemáticas en América Latina (pp 13-32) ITSON

OFICINA DE PUBLICACIONES ITSON

Contenido

Directorio

Dr. Jesús Héctor Hernández López
Rector

Dr. Jaime Garatuza Payán
Vicerrectoría Académica

Dr. Rodolfo Valenzuela Reynaga
Vicerrectoría Administrativa

Dr. Ernesto Uriel Cantú Soto
Secretario de la Rectoría

Mtro. Mauricio López Acosta
Dirección Unidad Navojoa

Mtro. Humberto Aceves Gutiérrez
Dirección Unidad Guaymas

Dra. María Elvira López Parra
Dirección Académica de la División de Ciencias Económico Administrativas

Dr. Armando Ambrosio López
Dirección Académica de la División de Ingeniería y Tecnología

Dr. Pablo Gortares Moroyoqui
Dirección Académica de la División de Recursos Naturales

Dra. Sonia Verónica Mortis Lozoya
Dirección Académica de la División de Ciencias Sociales y Humanidades

Dictaminadores

Dra. Erika Zubillaga Guerrero
Profesora-Investigadora de la Escuela Superior de Matemáticas No. 2
Universidad Autónoma de Guerrero

Dr. Agustín Grijalva Monteverde
Universidad de Sonora
Matemática Educativa

Mtro. Alan Daniel Robles Aguilar
Instituto Tecnológico de Sonora
Departamento de matemáticas

Dr. David Baca Carrasco
Instituto Tecnológico de Sonora
Departamento de matemáticas

Dr. Cesar Fabian Romero Félix
Universidad de Sonora
Matemática Educativa

Mtro. Alfredo Chacón Wismann
Instituto Tecnológico de Sonora
Departamento de matemáticas

Dr. Crisólogo Dolores Flores
Universidad Autónoma de Guerrero
Matemática Educativa

Dra. Catalina Navarro Sandoval
Universidad Autónoma de Guerrero
Matemática Educativa

Dr. Luis Manuel Cabrera Chim
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE)
Matemática Educativa

Prólogo

Prologue

La Matemática Educativa es una disciplina científica que, dependiendo de la escuela de investigación y la región geográfica, suele ubicarse como una rama de las Matemáticas o bien de las Ciencias de la Educación, y tiene como objetivo principal la mejora del aprendizaje de la matemática a través de los distintos marcos teóricos, métodos y estrategias que se han desarrollado a lo largo de las décadas.

En particular, la formación a nivel superior es un tema que ha tenido gran relevancia a nivel internacional, pero es el caso de la formación de ingenieros el que nos ha preocupado como grupo desde el año 2014 cuando las Dras. Ruth Rodríguez Gallegos y Bertha Ivonne Sánchez Luján comenzaron a coordinar un grupo de investigadores latinoamericanos con el interés común en la mejora del aprendizaje de la matemática. La historia y configuración del grupo puede consultarse en Rodríguez-Gallegos (2018), Arcos-Quezada et al. (2020) y Arcos-Quezada et al. (2022), donde se discuten además un conjunto de ocho preguntas fundamentales que han guiado las discusiones del grupo a lo largo de los años. Además de esto, como esfuerzo por difundir las actividades disponemos de un Webinar publicado a través de YouTube con conferencias y presentaciones, siendo esta la más representativa: https://www.youtube.com/watch?v=M8RTqjJJaG4.

Producto de estas discusiones han surgido distintos estudios desarrollados por parte de los miembros del grupo *Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa (FIME)* tanto en colaboraciones internas como individuales. Por ejemplo: la participación del Dr. Cajas en el proyecto alfa iii uso+i, el trabajo sobre transposición didáctica en la ingeniería (Cajas, 2001), o la discusión desarrollada por Cajas et al. (2022) acerca de cómo se evidencia la desarticulación matemática presente en los programas de ingeniería, realizada en conjunto con los Dres. Arcos-Quezada y Camacho-Ríos, y las Dras. Rodríguez-Gallegos y Torres-Corrales.

En relación con estudios de tipo documental y bibliográfico, Plaza y Villaochoa (2019) por su parte hacen una discusión amplia sobre los obstáculos (en el sentido de Bachelard, Barrantes, D'Amore y Andrade) que se han detectado en la formación de ingenieros (cuya presentación puede consultarse en https://www.youtube.com/watch?v=uEgguLEfBFc) , mientras que Torres-Corrales e Hinojos (2023) que realizaron un estado del arte sobre los principales aportes que ha tenido la Matemática Educativa para la formación de ingenieros.

También se han discutido sobre las formas de diversificar la evaluación, como en Sánchez-Luján (2014) en un libro sobre la innovación en el aula de matemáticas, donde se discute acerca de la tecnología digital como un recurso educativo valioso, el trabajo de Torres-Corrales et al. (2022) donde la retroalimentación de tareas se presenta como una estrategia diversificada de evaluación y Camacho et al. (2022) donde se discuten los resultados de distintas metodologías que han sido utilizadas en clase regular de matemáticas como modelización matemática, el uso de tecnologías digitales en medios remotos, la transversalidad y (nuevamente) la retroalimentación, y la participación del grupo en diferentes foros como el congreso virtual de MATEDUMAT, donde se discutió sobre los cambios producidos por la pandemia al ambiente educativo en general y cómo fue exigido el cambio de las formas de enseñar, aprender y evaluar, estas participaciones pueden consultarse en las ligas: https://www.youtube.com/watch?v=p99TN_HTmUQ y https://www.youtube.com/watch?v=bGHvsWFA2Kc.

Otro interés común ha sido el estudio de la brecha de género, respecto a lo cual se publicó un libro que invita a la reflexión acerca del trabajo realizado por las mujeres en la ingeniería a través de relatos y experiencias en el ejercicio profesional, coordinado por las Dras. Sánchez-Luján, Rodríguez-Gallegos y Torres-Corrales (2021). Este libro ha sido presentado en diversos foros académicos y como respaldo se tiene el siguiente video: https://www.youtube.com/watch?v=-13Jd9152QuY.

Finalmente, una última línea han sido los estudios de corte histórico y epistemológico, como Arcos-Quezada et al. (2022b) donde se muestran distintos enfoques teóricos para el uso de la historia en la enseñanza de la matemática utilizados por investigadores internacionales, y en Hinojos et al (2023) donde se muestran los resultados de la implementación de una intervención didáctica en clase regular donde se utiliza un instrumento construido con base en un análisis histórico-epistemológico. Un poco de esta línea puede ser consultado en el siguiente video: https://youtube.com/watch?v=VvL_OYv-73I.

Es así, dada la trayectoria y trabajo colegiado del grupo, como surge la presente obra, este libro que tiene como precedente la participación de los miembros del grupo en el I Foro de

Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa realizado en mayo de 2023 en el Instituto Tecnológico de Sonora. Este foro marcó un punto de reencuentro postpandemia que permitió retomar temas de interés y cristalizar el trabajo colegiado que se había venido desarrollando por parte del grupo FIME desde el año 2014 y que permite ampliar el alcance y discusión del trabajo a otros públicos interesados en la formación matemática de ingenieros.

Dr. Jesús Eduardo Hinojos Ramos
Matemática Educativa
Instituto Tecnológico de Sonora
Departamento de Matemáticas

Referencias

Arcos, I., Torres-Corrales, D., Hinojos, J., Plaza, F., Rodríguez-Gallegos, R. y Sánchez - Luján, B. (2020). Consideraciones sobre la formación matemática de los ingenieros en la "nueva normalidad". *Escuela de Invierno en Matemática Educativa XXIII*. Recuperado de: https://sabee.com.mx/eimexxiii/index.php/actividades/grupos#gt-2-formacion-matematica-de-ingenieros

Arcos-Quezada, J., Cajas, F., Rodríguez-Gallegos, R., Plaza-Gálvez, L. y Sánchez-Luján, B. (2022a). Formación de ingenieros y Matemática Educativa. La historia de un grupo latinoamericano de investigación. *Feglinin-Revista oficial de la Federación Global De Profesiones*, *I* (22), 44-50. https://federacionglobal.com/FEGLININ/No22/sep2022/vol- 1/access.html

Arcos-Quezada, J., Hinojos-Ramos, J., Montiel-Espinoza, G., Rodríguez, F. y Zubillaga, E. (2022b). La investigación histórica: enfoques para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en México en R. Gutiérrez y J. Prieto (Comps.), *Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática* (pp. 144-156). Asociación Aprender en Red.

Cajas, F. (2001). Alfabetización Científica y Tecnológica: La Transposición Didáctica del Conocimiento Tecnológico. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 243-254.

Cajas, F., Arcos, J., Camacho-Ríos, A., Rodríguez-Gallegos, R. y Torres-Corrales, D. (2022). La desarticulación matemática en la enseñanza de la ingeniería. *Feglinin-Revista oficial de la Federación Global De Profesiones*, *III*(22), 24-31. https://federacionglobal.com/FEGLININ/No22/sep2022/vol-3/access.html

Camacho-Ríos, A., de la Cruz, A., Hinojos-Ramos, J. Rodríguez-Gallegos, R. y Torres-Corrales, D. (2022). Repensando la evaluación en matemáticas para la formación de ingenieros. *Feglinin-Revista oficial de la Federación Global De Profesiones*, *II* (22), 43-49. https://federacionglobal.com/FEGLININ/No22/sep2022/vol-2/access.html

Hinojos-Ramos, J., Torres-Corrales, D., y Camacho-Ríos, A. (2023). The construction of the integral for the arc length of a curve based on van Heuraet and Fermat's works. *British Journal for the History of Mathematics*, *38*(1), 41-54. https://doi.org/10.1080/26375451.2023.2168880

Plaza, L. y Villa-Ochoa, J. (2019). Obstáculos detectados en la formación matemática de ingenieros: una revisión de literatura. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 58*, 223-241.

Rodríguez-Gallegos, R., Fallas, R., Torres-Corrales, D., Hinojos-Ramos, J. de la Cruz, A., y Hernández, H. (2018). Formación de profesionales desde la Matemática Educativa. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31*(2), 1272-1279.

Sánchez-Luján, B. (2014). *Innovación, tecnología y creatividad en el aula*. CAIEMNS.

Sánchez-Luján, B., Rodríguez-Gallegos, R. y Torres-Corrales, D. (Eds.). (2021). *Las mujeres en la enseñanza de la Ingeniería: Relatos, reflexiones y experiencias en el ejercicio profesional*. Editorial REDIECH.

Torres-Corrales, D., e Hinojos-Ramos, J. (2022). La formación matemática de ingenieros desde la Matemática Educativa. Estado del arte. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *25*, e21, 1-16. https://doi.org/10.24320/redie.2023.25.e21.4804

Torres-Corrales, D., Hinojos-Ramos, J. y Cuevas, O. (2022). El proceso de retroalimentación de tareas de matemáticas en la evaluación formativa de pregrado. *Areté, Revista Digital del Doctorado en Educación*, *8*(16), 123-137. https://doi.org/10.55560/ARETE.2022.16.8.6

Presentación del libro

Book presentation

En la confluencia de la matemática y la ingeniería, emerge una obra colectiva que traza nuevos horizontes en la formación de ingenieros. Este libro, fruto de un foro organizado en el Instituto Tecnológico de Sonora, es una compilación de ideas y perspectivas innovadoras ofrecidas por expertos en Matemática Educativa. A través de seis capítulos, la obra navega por las corrientes internacionales del currículum de ingeniería, las metodologías de enseñanza del Cálculo, el papel transformador de la tecnología, las teorías en la problematización del conocimiento matemático, las estrategias de modelización en el aula y la aplicabilidad de la resolución de problemas, iluminando cada tema con un enfoque fresco y pragmático.

La trama de la obra se teje alrededor de ejes temáticos que reflejan un enfoque integrador y aplicado en la enseñanza de la matemática para ingenieros. Se inicia con una reflexión sobre la evolución del currículo de ingeniería, considerando su intersección con prácticas sociales como la economía y la política, y cómo esto redefine la enseñanza del cálculo para favorecer una comprensión más aplicada. La discusión avanza hacia la integración de la tecnología en el aula, destacando el rol de las innovaciones tecnológicas y las aplicaciones móviles en la transposición de teorías pedagógicas a prácticas concretas. Se enfatiza en la modelización matemática y su aplicabilidad en la resolución de problemas reales, abogando por un aprendizaje que prepara a los estudiantes para los desafíos multidisciplinarios de la modernidad. Este enfoque temático resalta la importancia de la adaptación y la innovación en la formación matemática de los ingenieros.

Esta obra no solo es un testimonio de la intersección entre la matemática educativa y la formación de ingenieros, sino también un reflejo del compromiso colectivo por enriquecer los procesos de aprendizaje. Con una visión que abarca desde la evolución del currículum hasta la aplicación práctica de la matemática en la ingeniería, cada capítulo, meticulosamente elaborado, invita a repensar las estrategias pedagógicas y a adoptar un enfoque más holístico en la enseñanza.

El primer capítulo, escrito por Fernando Cajas, aborda la evolución del currículum en ingeniería desde una perspectiva educativa y social, destacando la importancia de integrar diversas prácticas sociales en la formación de ingenieros. Se enfatiza la ingeniería como una práctica social que transforma el mundo y se discuten los modelos curriculares actuales, proponiendo un enfoque que reconozca la ingeniería no solo como ciencia aplicada o resolución de problemas, sino como una práctica social integral.

El segundo capítulo, escrito por José Ismael Arcos Quezada, discute la enseñanza del Cálculo en la formación de ingenieros, argumentando que se debe reconsiderar el enfoque centrado en el concepto de límite. El capítulo analiza la evolución histórica del Cálculo y cómo su enseñanza se ha alejado de las aplicaciones prácticas en ingeniería, sugiriendo una aproximación más intuitiva y menos rigurosa en la definición de conceptos como la derivada y la integral, para mejorar la comprensión y aplicación de estos en problemas de ingeniería.

El tercer capítulo, de Saúl Ernesto Cosmes Aragón, Jesús Eduardo Hinojos Ramos, y Diana del Carmen Torres Corrales, examina tres perspectivas teórico-metodológicas en la formación matemática de ingenieros desde la Matemática Educativa. Se destaca la importancia de conectar la matemática con la práctica ingenieril mediante el uso de modelización y Espacios de Trabajo Matemático (ETM), analizando casos específicos como la Ingeniería Civil y la Ingeniería Eléctrica. Se sugiere un enfoque cualitativo para comprender mejor la relación entre la matemática y la ingeniería en contextos profesionales.

El cuarto capítulo, a cargo de Alberto Camacho-Ríos, Andrés Hernández Quintana, y Leonardo Nevárez Chávez, se centra en la modelización antropológica de desarrollos tecnológicos, particularmente en una aplicación móvil para la enseñanza de series de Fourier en cursos de ecuaciones diferenciales. Se discute cómo esta herramienta integra la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) y la transposición informática, evidenciando las implicaciones pedagógicas y las diferencias entre los procesos matemáticos tradicionales y los generados por la aplicación, resaltando la importancia de considerar estos aspectos en la enseñanza de la matemática.

El quinto capítulo, de Luis Fernando Plaza Gálvez, se centra en la modelación matemática en la enseñanza de ecuaciones diferenciales, destacando su importancia en la formación ingenieril. A través de ejemplos prácticos, como la Ley de Enfriamiento de Newton, se muestra cómo la modelación ayuda a los estudiantes a comprender y aplicar conceptos matemáticos en contextos reales, promoviendo un aprendizaje significativo y relevante para su futura práctica profesional.

Finalmente, el sexto capítulo, escrito por Oscar Rubén Gómez Aldama, Lamberto Castro Arce y Viridiana Gómez Barrón, explora la modelización matemática en la enseñanza utilizando el ciclo de Deming. A través de un enfoque práctico y ejemplificado, los autores ilustran cómo este modelo de mejora continua puede aplicarse a problemas matemáticos complejos, facilitando la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos en contextos reales y mejorando así la calidad de la educación en ingeniería.

Con un tono accesible y dirigido a la difusión, este libro se presenta como un recurso esencial para educadores, investigadores y profesionales interesados en la vanguardia de la formación matemática en ingeniería. Es una obra que se sitúa en la intersección de disciplinas, pero con un claro objetivo: la mejora continua del aprendizaje matemático para ingenieros, fundamentada en la riqueza de las experiencias compartidas y las innovaciones pedagógicas. En cada página, el lector encontrará una fuente de inspiración y un llamado a la acción para transformar la educación matemática en ingeniería, preparando así a las futuras generaciones para los retos que aguardan en un mundo cada vez más tecnificado.

Dr. Mauricio Gabriel Orozco del Castillo[1]
Profesor Investigador Titular C
Instituto Tecnológico de Mérida

1 Doctor y Maestro en Matemáticas y Computación Aplicadas por el Instituto Mexicano del Petróleo, Maestro en Matemática Educativa por el Cinvestav e Ingeniero en Mecatrónica por el Instituto Politécnico Nacional (IPN). Es miembro del SNII, autor de más 50 artículos científicos publicados en fuentes de prestigio y con más de 250 citas a ellos, Ha trabajado en docencia e investigación en Instituto Tecnológico de Mérida (ITM), IPN, Cinvestav y Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), abarcando desde la educación superior hasta programas de posgrado. Cuenta con más de 20 años de experiencia en la enseñanza, donde ha dirigido tesis de licenciatura y posgrado, y ha participado activamente en la comunidad científica, fundando y organizando diversos congresos científicos nacionales e internacionales.

Capítulo 1. El nuevo currículum de Ingeniería

Chapter 1. The new Engineering curriculum

Fernando Cajas

Centro Universitario de Occidente, Universidad de San Carlos de Guatemala

fcajas@cunoc.edu.gt

Introducción

En este capítulo se presenta una reflexión acerca de la ingeniería y la evolución de su currículum desde la perspectiva educativa con enfoque social, la cual es resultado de la experiencia del autor como docente, investigador y administrativo en una facultad de ingeniería.

La ingeniería es una Práctica Social (PS) cuyo objetivo es la transformación del mundo a través del diseño, planificación, construcción, evaluación, mantenimiento y administración de sistemas sociales concretos. Esta forma parte de otras prácticas sociales más amplias, como la práctica económica cuyo objetivo es la producción de bienes y servicios; la práctica política que es el manejo y gestión del poder dentro de una sociedad humana; y la práctica cultural que incluye actividades de construcción de identidades, y como una práctica cultural que tiene intensa relación con la práctica económica, toda vez que el proceso de diseño, planificación, construcción y mantenimiento de sistemas sociales concretos están íntimamente relacionados con la producción de bienes y servicios.

La ingeniería además puede verse como artefacto, conocimiento o práctica social, y es difícil separar el producto final de la práctica, esto es: diferenciar los artefactos de los procesos que los construyeron ya que existe una íntima relación entre los artefactos y su diseño. Los artefactos son sistemas concretos complejos que, para llegar a su destino, metafórico, deben mediar y ser mediados por otras prácticas sociales, particularmente la práctica económica, ya que estos deben ser utilizados en una sociedad cuyo mercado los demanda. Los procesos económicos del diseño son considerados dentro del currículo actual de ingeniería en cursos como Administración, Proyectos, Contabilidad, Análisis Financiero, entre otros, y representan elementos de la Práctica Social que al final suelen determinar si un producto o proceso diseñado es utilizado en y por una sociedad concreta. La ingeniería es fundamental dentro de una sociedad, ya que es una actividad humana intencionada (Práctica Social) que ordena otros procesos dentro de una sociedad (es normalizadora).

La Práctica Política (PP), donde se dan procesos de gestión del poder para la organización social, no sería nada sin la ingeniería, no solamente en términos de los productos finales tecnológicos que hacen la vida social; carreteras, puentes, edificios, casas, drenajes, sistemas de tratamiento de agua, autos, motores de combustión interna, motores eléctricos, sistemas de producción y distribución de energía, hospitales, escuelas, hoteles, teléfonos, etc., sino que la propia organización de la sociedad depende del grado de desarrollo de la ingeniería y de las normas sociales que constituyen el pegamento social. En otras palabras, tanto la política en el sentido del control y poder (politics) y la práctica política en el sentido de construir política pública que direcciona a una sociedad (policy) sólo existen si existen proyectos y sistemas concretos de la ingeniería que puedan desarrollarlos.

Como Práctica Cultural (PC), es una actividad orientada hacia la construcción de identidades, así como la música, la matemática, la ciencia en general, la religión, el deporte y tantas otras prácticas que construyen y reconstruyen identidades de diferente índole en sus procesos de diseño, planificación, ejecución, construcción, mantenimiento y uso de los artefactos finales de la ingeniería. Como Práctica Cultural la práctica social de la ingeniería interacciona con la Práctica Económica y con la Práctica Política, sin ser esencialmente una práctica económica ni política, pero que no puede existir sin estas dos prácticas. Al mismo tiempo, la ingeniería es una práctica diferenciada, esto es, una actividad humana intencional que usa conocimiento empírico, artesanal, técnico, matemático, científico, tecnológico, social específico para el diseño, la producción y mantenimiento de sistemas concretos llamados genéricamente artefactos.

Al ser en su origen una PC, una actividad de seres humanos organizados en sociedad con el objetivo de producir identidades a través de artefactos o procesos; la ingeniería tiene una larga historia de uso y producción de distintos tipos de conocimiento y esta historia epistemológica refleja diferentes estados de las sociedades humanas que se vieron profundamente transformadas por la *Revolución Industrial*, revolución que cambió la forma de producir bienes y servicios, particularmente bienes mediados por conocimiento tecnológico, conocimiento científico y otros tipos de conocimiento que de a poco se fueron especializando, respondiendo a las nuevas demandas de la sociedad inglesa primero, europea luego y mundial después. Aunque los estudios académicos de ingeniería empiezan en el siglo XIX, particularmente con el trabajo de los elastisistas franceses (Trusdell, 1968) no fue sino hasta el siglo XX donde se generaliza a nivel mundial el estudio de la ingeniería dentro de las universidades y tecnológicos.

En general, la ingeniería siempre fue considerada, por mucho tiempo y por muchas personas; una carrera para hombres, *hombres prácticos*. De hecho, hace cien años no había mujeres ingenieras, desde el punto de vista de ser ellas explícitas en la sociedad y decir: *yo soy ingeniera*. Aún ahora, en la segunda década del siglo XXI, se reporta una enorme brecha entre el número de estudiantes hombres que estudian ingeniería y el número de estudiantes mujeres que están estudiando alguna ingeniería; tan solo en América Latina se ha reportado un 80 % de hombres y el 20 % de mujeres estudiantes de ingeniería. lo que refleja la distribución de trabajo dentro de esta disciplina (UNESCO, 2022).

Aunque las ingenierías clásicas, esto es, ingeniería civil e ingeniería mecánica, siguen siendo carreras importantes en las facultades de ingeniería, la diversificación de ofertas académicas en ingeniería es enorme como lo refleja la tabla 1:

Tabla 1
Listado de programas de ingeniería acreditados por American Board of Engineering and Technology (ABET).

Aerospace	Health and Safety
Agricultural	Industrial
Biomedical	Marine and Ocean
Chemical	Materials
Civil	Mechanical
Computer Hardware	Mining and Geological
Electrical	Nuclear

En el desarrollo histórico de los estudios de ingeniería se ha seguido la evolución industrial de cada población, así; es la ingeniería civil la más clásica de las ingenierías, como contraparte social de la ingeniería militar; luego ingeniería mecánica, luego ingeniería industrial, ingeniería eléctrica (con sus dos versiones: electrónica y potencia), ingeniería agrícola, ingeniería química y así sigue la cadena de transformaciones. En otras palabras, el nacimiento de nuevas ramas de la ingeniería ha sido permeado por los distintos referentes ontológicos de estructuras materiales, pasando por sistemas físicos, mecánicos, sistemas químicos y últimamente biológicos.

Modelos Curriculares en Ingeniería

Los modelos curriculares de la ingeniería en América Latina son variados, aunque sigan un patrón de una cadena curricular de ciencias básicas hacia ciencias de la ingeniería dejando al final de los estudios a las materias profesionales. A nivel mundial hay otras alternativas curriculares, particularmente en Australia, Alemania, Holanda, Suecia debido al alto desarrollo tecnológico de esas sociedades. Uno pudiera diferenciar entre propuestas curriculares “teóricas” y “prácticas”. Tradicionalmente la ingeniería francesa ha sido más teórica que la ingeniería inglesa, por ejemplo. En América Latina hay más uniformidad como lo refleja el informe del Proyecto USO + I: Pertinencia de la Ingeniería en América Latina (2010).

Tanto en América Latina como en el mundo uno puede analizar tres tipos de programas de educación en ingeniería: Aquellos que se basan en 1) ingeniería como artefacto, 2) ingeniería como conocimiento e 3) ingeniería como Práctica Social.

Ingeniería como artefacto

La concepción de ingeniería como artefacto, en su versión curricular; pone el énfasis en el producto final de la práctica social, el objeto o proceso tecnológico objetivo que se crea luego del diseño. Históricamente -ingeniería como artefacto- explica los programas de formación de ingeniería en términos de la intuición del *hombre práctico*. Estos programas de ingeniería no fueron escolarizados sino hasta 1900 cuando emergen las primeras escuelas de ingeniería adentro de universidades y principalmente adentro de tecnológicos, escuelas técnicas o politécnicas. Previo a la escolarización de la ingeniería, la producción de artefactos, técnicos o de ingeniería; estaba a cargo de artesanos que tenían una relación importante con sus aprendices, quienes aprendían la práctica en un taller por ensayo y error con el maestro y la transformación de la materia prima (materiales), la planificación (explícita o implícita) del diseño, ya sea encapsulado en planos físicos o en ideas de trabajo.

La concepción curricular de ingeniería como artefacto es tan fuerte e importante que existe una concepción generalizada dentro de las comunidades de ingeniería que se auto perciben como los (únicos) que tienen el poder de transformar el mundo (Sheppard, et al., 2006) si sus diseños fuesen llevados a la realidad como ellos lo especifican en sus planos. O sea, si la gente pudiese interpretar *perfectamente* los diseños de los ingenieros (materializado en planos digitales o concretos, prototipos o los mismos planos de diseño con sus especificaciones) entonces el mundo puede ser cambiado. Esta posición es el análogo de la frase de Arquímedes: *Dadme un punto de apoyo y moveré al mundo*, cuya versión de ingeniería seria *haz el artefacto como lo pido yo en mis planos y cambiaré el mundo*.

En resumen, los programas de *ingeniería como artefacto* son empíricos, con poca o ninguna base científica en donde mucho de los diseños son por ensayo y error y cuyos conocimientos están más cercanos a las comunidades de artesanos, que vienen creando artefactos desde hace miles de años y cuya práctica se ve interrumpida con la Revolución Industrial. Estos programas de ingeniería-como-artefacto ponen el énfasis en el ARTE y no tanto en el FACTO.

Ingeniería como conocimiento

A mediados del Siglo XX se reconceptualizan los programas de enseñanza de la ingeniería, principalmente en los Estados Unidos de Norte América. En ese país se concibe entonces a la ingeniería como ciencia aplicada. Se parte de una concepción idealizada del trabajo de los ingenieros, tal como la siguiente presentada en el seno de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia (AAAS por sus siglas en inglés):

> En su sentido más amplio, la ingeniería consiste en el análisis de un problema y en el diseño de su solución. El método básico concibe primero un enfoque general y luego resuelve los detalles técnicos de la construcción de los objetos (como un motor de automóvil, un chip de computadora o un juguete mecánico) o procesos requeridos, (como la irrigación o la prueba de un producto). (AAAS, 1989).

Esta visión de ingeniería, que nace, crece y se desarrolla dentro de comunidades de ingenieros, donde se auto conciben como personas que resuelven problemas de forma individual y no socialmente, de tal forma que asumen la existencia de un cuerpo de conocimientos técnico que les permite resolver esos problemas. Es a partir de esta concepción de conocimiento platónico que se reconstruye dentro de las escuelas de ingeniería una concepción idealizada de la solución de problema, tal como se muestra en la figura 1.

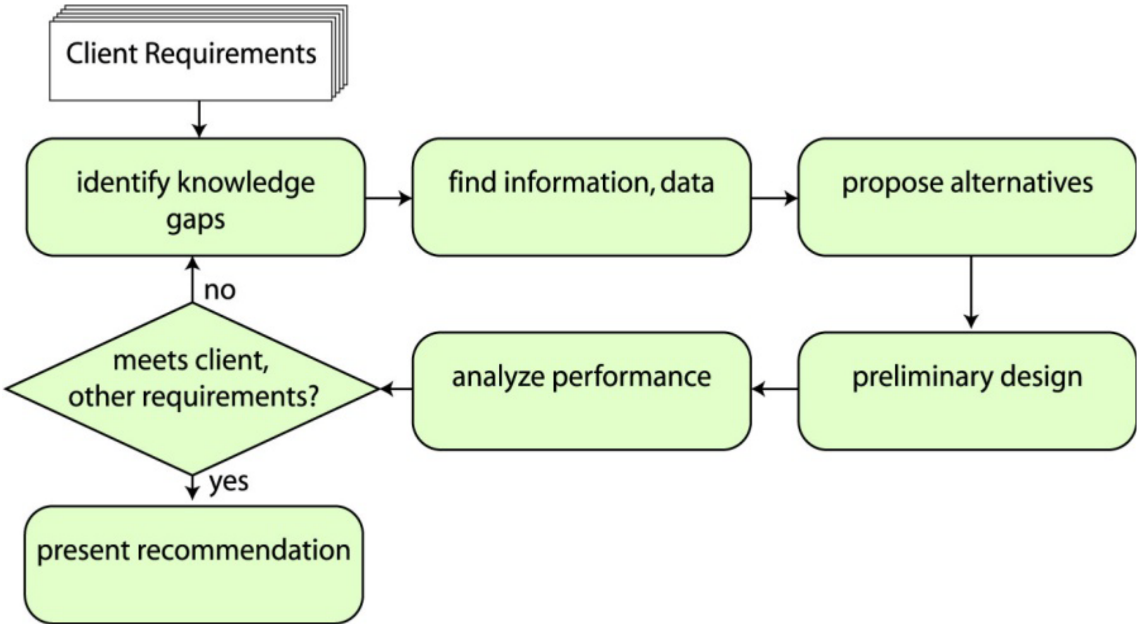


Figura 1. Ilustración del modelo de Solución de Problemas, empezando con los requerimientos del cliente y "otros requerimientos" que incluyen las regulaciones estándar de acuerdo con unas supuestas necesidades sociales y restricciones ambientales (Sheppard et al., 2006).

Este modelo de ingeniería como Solucionador de Problemas (Problem Solving) no da razón de los hallazgos de las antropologías de la ingeniería en la cual la práctica del diseño no es reportada como este modelo lineal sino más bien como un proceso complejo de negociaciones, conversaciones e incertidumbres. Tal como lo reporta Bucciarelli (1999) como consultor de un en el proceso de diseño de proyectos de ingeniería. En los tres proyectos, examina tanto el objetivo, la forma en que los participantes entendieron cómo funcionan las cosas, así como el entendimiento del proceso, la forma en que diseñan. Lo que reporta Bucciarelli (1999) es que el diseño de ingeniería es un proceso social que implica una negociación constante entre muchas partes, no solo ingenieros, sino también personas de marketing, científicos investigadores, contadores y clientes. Resulta que diseñar se trata tanto de acordar definiciones como de producir artefactos *duros*.

La concepción de ingeniería como ciencia aplicada, regida por un modelo lineal de solución de problemas; parece estar lejos de la ingeniería real. A pesar de esta lejanía, los currículos de ingeniería de muchos países en el mundo, particularmente en América Latina están regidos con una concepción de ingeniería como conocimiento, particularmente ingeniería como ciencia aplicada. En efecto la cadena curricular generalizada de estudios de ingeniería se muestra en la figura 2.

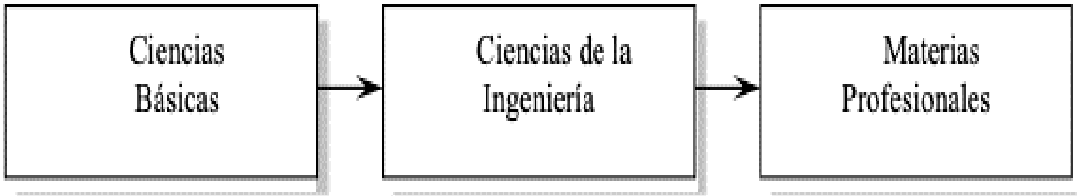


Figura 2. Modelo lineal del currículo de ingeniería (elaboración del autor).

En el modelo lineal de los programas de formación de ingeniería la *Ciencia Básica* es fundamental y cronológicamente se imparte antes que las ciencias de la ingeniería (Ver figura 2). La *Ciencia Básica* pertenece a lo que se le ha llamado ***Área Común*** en todos los estudios de ingeniería-como-conocimiento. Epistemológicamente la ciencia tiene por objetivo la descripción, explicación y predicción del funcionamiento de partículas, grupo de partículas, sistemas de partículas, cuerpos rígidos, cuerpos deformables, fluidos ideales, fluidos reales y estructuras reales. Aquí la ciencia se usa para describir o explicar y hasta para predecir el comportamiento de un sistema, no para transformar.

Los cursos de *Ciencias Básicas* como la física, química y matemática se imparten desde el paradigma lineal, donde la ingeniería es vista como conocimiento. Estos cursos asumen una concepción científica y no una concepción de ingeniería. Así, por ejemplo, en física y mecánica analítica los ejemplos son aplicaciones de las Leyes de Newton para el caso partículas, cuerpos o estructuras en equilibrio. Las preguntas que se hacen en ciencias básicas tienen que ver con describir, explicar y a veces predecir las fuerzas que actúan sobre una estructura dada. La tradición didáctica es más o menos la siguiente, dada una estructura (ejemplo una columna), se pregunta que se determinen las fuerzas y torques que actúan sobre esta estructura cuando está en equilibrio estático.

En ningún caso se hace la pregunta que un ingeniero o sistema de ingeniería se hace en los casos reales de la práctica: ¿con qué estructura puedo llenar la función de cubrir un área determinada? Y mucho menos se pregunta, ¿cuál es la función social de esta estructura?, ¿cómo será mantenida, ¿cuáles son los efectos secundarios que traerá a la comunidad?

Este posicionamiento filosófico en general y epistemológico en particular de las *Ciencias Básicas* se repite en las *Ciencias de la Ingeniería*. Ambas, *Ciencias Básicas* y *Ciencias de la ingeniería*, se basan en una concepción de la ingeniería como *ciencia aplicada*, caracterizada por el reduccionismo toda vez que se construye una visión ingenua de la capacidad de la ciencia de modelar procesos de la ingeniería. El problema no está solamente en la falta de modelación, ya que se modelan fenómenos de tipo científico, cuando en verdad la ingeniería es mucho más que eso. Si bien se da un proceso de matematización de la física (algebra) al idealizar sobre una cadena ontológica que analiza primero supuestas partículas hasta llegar a cuerpos idealizados (ver figura 3).

Particula---Grupos de Particulas---Cuerpo Rigido---Cuerpo Deformable---Fluido Ideal

Figura 3. Cadena ontológica del modelo de ingeniería.

La matemática asociada a estos modelos es una matemática descontextualizada en el sentido de la ingeniería, toda vez que sus prácticas de referencia son las de la física y la matemática. Esta física o matemática (o para los propósitos del presente artículo cualquier ciencia básica), no tienen conexión con los intereses sociales de las ingenierías ni con los intereses de ingeniería de los alumnos. No se está diciendo que estas prácticas científicas y matemáticas están descontextualizadas si se miran desde una perspectiva científica. Tampoco se dice que la ciencia y la matemática no son pertinentes para la ingeniería. Lo que se dice es que son descontextualizadas en el sentido de sus referentes de ingeniería. La modelización matemática de fenómenos naturales o artificiales se hace desde una perspectiva científica, esto es: ¿cómo funciona el sistema? ¿por qué hace lo que hace? ¿cómo describo el fenómeno? ¿cómo explico el fenómeno? ¿cómo predigo este fenómeno?

No es que los fenómenos físicos no sean de interés para la ingeniería. Tampoco es que los fenómenos artificiales, léase el funcionamiento de un robot, modelación del tráfico u otro, no sea de importancia para la ingeniería. De hecho, tanto el Área Común (Ciencias Básicas) como en los cursos de Ciencias de la Ingeniería, los estudiantes aprenden a modelar fenómenos físicos más complejos, tal el caso de calidad de suelos, transferencia de calor o transferencia de masa, vibraciones de estructuras, funcionamiento de sistemas complejos, etc. Sin embargo, en esos casos la referencia y objetivo es la explicación científica, no la práctica de la ingeniería.

El modelo curricular de ingeniería-como-conocimiento tiene la ventaja de formar teóricamente a los alumnos de las licenciaturas de ingeniería en ciencia básica. Esta base científica les permite aproximarse mejor a las ciencias de ingeniería, aunque no los prepara bien para los problemas reales de la ingeniería. Esto porque la concepción de ingeniería como ciencia aplicada no es correcta y aún la concepción de ingeniería como resolución de problemas técnicos, tampoco se sostiene con los estudios de la ingeniería en la realidad. En efecto, ni el modelo de ingeniería-como-artefacto ni ingeniería-como-conocimiento reconocen que:

- Los ingenieros y las ingenieras no resuelven problemas solos, aislados, sino como parte de una comunidad y con personas de diferentes profesiones y visiones.
- Los ingenieros y las ingenieras diseñan soluciones a problemas complejos bajo muchas restricciones, entre ellas económicas, políticas y culturales, no digamos las restricciones técnicas, de materiales y del mismo conocimiento de ingeniería que nunca será completo.
- La ingeniería real, sea de países desarrollados o países en vías de desarrollo, no se da por procesos de diseño lineal, sino más bien por procesos interactivos, con retroalimentación compleja, contingente y plagado de incertidumbre.

El modelo de ingeniería-como-conocimiento no da razón de estas complejidades de la ingeniería en acción. En efecto, la educación en ingeniería tradicional tiene una concepción de ingeniería como ciencia aplicada, esto es, el énfasis está en *conocer* (cognición) y el currículo se estructura como ciencia básica aplicada o como ciencias de la ingeniería aplicada. Poco de este modelo curricular prepara a los estudiantes para la acción, para la práctica real de la ingeniería, esto es; para interacciones sociales complejas, para considerar marcos sociológicos más robustos y para entender la naturaleza contingente e incierta del diseño y práctica de la ingeniería. Estos problemas curriculares pueden ser resueltos desde el modelo de ingeniería-como-práctica social*. Para ello primero hay que aclarar el concepto de "Práctica Social" y explicar cómo y porqué la ingeniería puede verse como una Práctica Social.

Práctica Social

Cuando uno habla de práctica social, hay muchas concepciones de la misma. En este artículo utilizo una noción estructuralista de Práctica Social como el elemento ontológico básico en que se constituye una sociedad humana. Esto es, la Práctica Social no es solamente una actividad humana, ni sólo es una acción intencionada, es mucho más que esto. La Práctica Social es el elemento básico de la formación de la sociedad humana y es lo que nos hace sociales a los seres humanos y por lo tanto norma a la actividad humana y viceversa. Este viceversa significa que la práctica norma y es normada por la acción.

Pero la práctica no es sólo momentánea, no es solamente una acción, ni un conjunto aislado de acciones, es una norma social que hace que hagamos lo que hacemos y principalmente norma cómo lo hacemos y hasta con qué los hacemos. Hay prácticas que duran un instante, unos segundos, como la práctica de cruzar una calle con mucho tráfico vehicular de automotores, no es igual en Ciudad de México que en Ciudad de Panamá y menos en Ciudad de Nueva York. Cada cultura tiene su forma particular de cruzar calles con mucho tráfico vehicular. Pero hay otras prácticas que pueden durar siglos, como la práctica de construir, en particular construir catedrales, que puede durar cientos de años.

La idea es que existen culturas de la ingeniería. Esto es, la forma de diseñar artefactos, la forma de administrar proyectos, la forma de darle mantenimiento a los productos tecnológicos y de las ingenierías está mediado por normas sociales. Así, la Ingeniería francesa del Siglo XX difiere de la ingeniería inglesa, siendo la francesa más teórica, mientras que la inglesa es práctica. Estas ingenierías difieren de la norteamericana, no digamos de la rusa.

Aunque la globalización de finales del Siglo XX trajo consigo una serie de compartimientos culturales en todo sentido y con ello la práctica de la ingeniería también se globalizó. A pesar de la globalización económica, política y cultural, aún existen culturas específicas de la ingeniería en cada región y esas son las que, desde mi punto de vista deben iluminar la construcción del nuevo currículo de ingeniería.

Los antecedentes de la teoría de las prácticas sociales pueden ser encontrados en al menos dos grandes vertientes teóricas. Un primer referente lo constituye la teoría sociológica de la segunda mitad del siglo XX, específicamente las teorías de Althusser y Giddens, quienes utilizan el concepto de práctica social para dar cuenta de la actividad como un aspecto constitutivo del mundo social y como estrategia de solución a la tensión entre estructura y agencia. Althusser le da más énfasis a la estructura mientras que Giddens a la agencia. Hay otra concepción de Práctica Social que es menos drástica toda vez que ve a la Práctica Social como una consecuencia de la Actividad Humana. Esta es la concepción de Bourdieu, con sus conceptos débiles de práctica.

En el caso de Althusser, la práctica se desarrolla en directa relación con el concepto de *estructura* y con ello el filósofo neo marxista francés busca dar cuenta de la relación entre los determinantes estructurales (la estructura de la práctica social) y los sistemas productivos de una sociedad (materia prima, medios de producción, objeto de transformación, trabajo, herramientas, producto final). Por su parte, en la Teoría de la Estructuración, Giddens define las prácticas sociales y su dimensión recursiva como un aspecto constitutivo de la vida social sobre la cual se generan y operan las estructuras sociales.

En su amplia obra, Giddens enfatiza la relevancia del saber práctico que se expresa en la organización de los seres humanos a través de prácticas y en su recursividad como el origen de estructuras estables. A esto Althusser le llama prácticas reproductivas. Tal como han planteado recientemente algunos autores, si bien el concepto de prácticas juega un papel central en los sistemas teóricos de ambos autores; tanto Althusser como Giddens, circunscriben su uso a una teoría social general en la cual las prácticas son sólo un componente más entre otros elementos. Esto contrasta con mi propia visión de Práctica Social debido a que las considero como el elemento básico de una sociedad humana, lo que nos hace sociales: nuestra ontología básica como humanos.

La ingeniería no sólo puede verse como Práctica Social, sino es una Práctica Social, esto es una actividad humana orientada y orientadora, que está normada y normaliza otras prácticas sociales alrededor del contexto, especifico, en un espacio y tiempo concreto, a la que hay que asociar herramientas, conocimiento, medios de producción, materia prima (física o intelectual).

Modelos Curriculares de la Ingeniería

La ingeniería entonces puede verse como artefacto, como conocimiento o como Práctica Social como se ilustra en la figura 4.

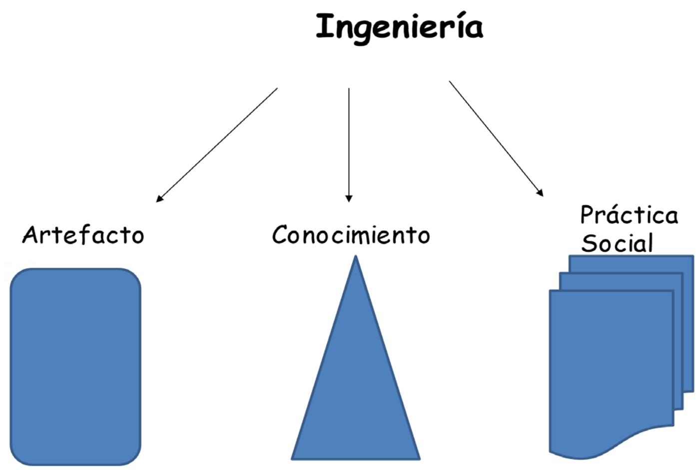


Figura 4. Ingeniería como artefacto, conocimiento y como Práctica Social.

Estos modelos "tipo" de programas de educación en ingeniería no deben entenderse como una descripción o explicación nítida de la educación en ingeniería sino más bien como una forma de ordenar la complejidad de los diferentes programas de formación en ingeniería. En este momento no existe un programa "puro" de ingeniería como-artefacto o programa puro de ingeniería como-conocimiento sino más bien mezcla de programas tipo. Estos programas existentes son complejos y terminan siendo una combinación de estos y otras visiones no documentadas en este artículo.

En efecto, el modelo universitario tradicional define las prácticas universitarias (el prácticum) como una oportunidad para aplicar los conocimientos teóricos aprendidos previamente en las clases teóricas. Si bien esta concepción de práctica es complementaria a la noción aquí utilizada de Práctica Social, este prácticum solamente es una parte de la Práctica Social. Desde esa concepción "la práctica" es una aplicación de la teoría aprendida, casi siempre al final del programa universitario.

$$Teoría \Rightarrow Realidad$$

El currículo de ingeniería basado en prácticas requiere, por un lado; el planteamiento teórico de ver a la ingeniería como una Práctica Social y por el otro la profunda transformación de iniciar, desarrollar y concluir con prácticas. En efecto, el planteamiento importante que hace este planteamiento es:

$$Realidad \Rightarrow Teoría$$

Este énfasis no debe verse como empirismo en educación en ingeniería. El objetivo es retomar la interacción dialéctica ya avizorada por los sociólogos marxistas, esto es:

$$Realidad \Leftrightarrow Teoría$$

Ingeniería como Práctica Social

La ingeniería es realmente una actividad humana intencionada, orientada y orientadora, que está normada, restringida o ampliada por la cultura local y las prácticas económicas y políticas que la condicionan. Toda *Práctica Social* tiene la misma estructura, esto es; materia prima, herramientas, medios de producción, herramientas, trabajo u producto final (Althusser, 1989): Toda *Práctica Social* se da en un contexto social determinado (está situada en el espacio), es contingente, está situada en el tiempo (puede durar segundos o cientos de años). En particular, la ingeniería es una *Práctica Social Híbrida* que es la unión sistémica de varias prácticas sociales que la integran, en particular la práctica de la Planificación, PP, la del Diseño, PD, la de la Administración, PA; la de la Construcción, PC y la del Mantenimiento, PM. Estas prácticas sociales mostradas en la figura 5 forman a la Práctica Social de la ingeniería, PI.

$$\boldsymbol{PI} = (\boldsymbol{PP})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{PD})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{PE})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{PA})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{PC})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{PM})$$

Figura 5. La Práctica de la ingeniería es la unión sistémica de otras prácticas sociales, como la práctica de la planificación (PP), el diseño (PD), la ejecución (PE), la administración (PA), la construcción (PC) y el mantenimiento (PM), entre otras.

Una sociedad humana puede verse como un sistema concreto formado por tres prácticas sociales básicas: La económica, la política y la cultural. La práctica económica, PE, tiene por objetivo la producción de bienes y servicios. La práctica política, PP, se refiere al manejo y gestión del poder dentro de una sociedad humana. La práctica cultural, PC, construye fundamentalmente identidades, incluye actividades artísticas, deportivas, espirituales, entre otras. La práctica de la ingeniería primariamente es una práctica cultural con fuertes nexos a la práctica económica y política de una sociedad. La ingeniería no es vista en las escuelas de ingeniería como Práctica Social debido a:

1) Los pocos estudios de filosofía de la ingeniería (dado a que los ingenieros son personas de acción).
2) La ausencia de estudios de antropología de la ingeniería, principalmente en América Latina.
3) Los pocos estudios de mercados serios de los programas de educación en ingeniería.
4) La falta de alternativas curriculares dada la influencia del modelo de ingeniería como ciencia aplicada y al modelo de ingeniería como solución de problemas.
5) La trasposición didáctica sobre simplificada que ha dejado un currículo atomizado, impertinente y alejado de la Práctica de la ingeniería.

La inexistencia de programas de educación en ingeniería basados en Prácticas Sociales de la ingeniería se debe a la complejidad que acarrea preparar un currículo que inserte la realidad de lo que hace el ingeniero en su vida cotidiana en el currículo de ingeniería. El modelo dominante de ingeniería es el de ingeniería como Ciencia Aplicada y su aliando principal, el ingeniero como la base de la Solución de Problemas; este es el paradigma dominante en América Latina (Montalvo et al., 2010).

El replanteamiento de un programa de formación de ingenieros y de ingenieras alrededor de la Práctica Social de la Ingeniería requiere la introducción de las Prácticas Sociales que componen la ingeniería, que en principio serian:

- Práctica de la Planificación
- Práctica del Diseño
- Práctica de la Ejecución
- Práctica de la Administración
- Práctica de la Construcción
- Práctica del Mantenimiento

Los programas tradicionales de educación en ingeniería usualmente introducen las ciencias básicas sin fenómenos de ingeniería. Luego introducen las ciencias de la ingeniería como explicaciones científicas de los artefactos tecnológicos y dejan a los cursos profesionales para el último año de formación, cursos que realmente afrontan la Práctica de la Ingeniería. Esto produce una desvinculación entre las herramientas científicas y matemáticas que requiere la práctica de la ingeniería y los fenómenos reales de ingeniería (Cajas et al. 2022), una posible solución sería la introducción gradual de prácticas de ingeniería.

En el caso de mi propia universidad, la Universidad de San Carlos de Guatemala, se ha creado un currículo paralelo al del modelo lineal de tal forma que la formación en ingeniería incluya la introducción explicita de determinadas prácticas de ingeniería, las que en su momento consideramos las más básicas (Cajas, 2001). Abajo dos modelos de introducción de las prácticas sociales de ingeniería al currículo de ingeniería (ver figura 6).

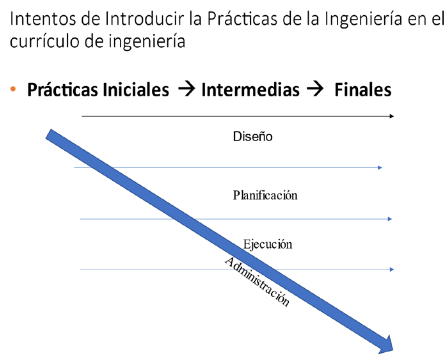


Figura 6. Introducción de las prácticas de ingeniería al currículo tradicional de ingeniería.

La experiencia en el caso de los programas de ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala sigue la estrategia de dejar la cadena curricular original de Ciencias Básicas, Ciencias de ingeniería y Cursos Profesionales y paralelamente desarrollar Prácticas de ingeniería se la siguiente forma (ver figura 7):

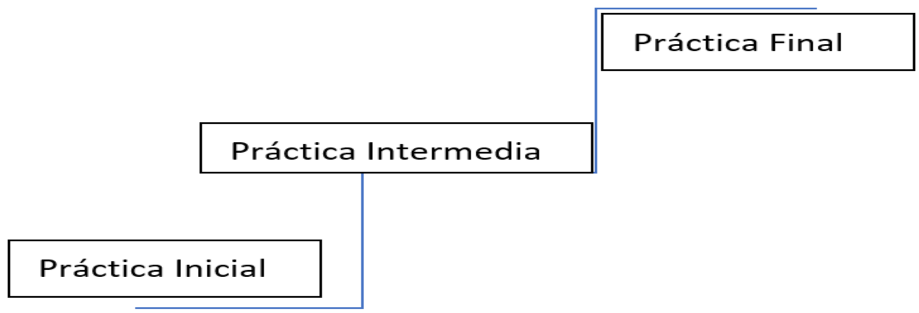


Figura 7. Introducción gradual de las prácticas de la ingeniería al currículo tradicional de ingeniería.

El reto de esta estrategia es clarificar el significado de cada práctica de la ingeniería. Por ejemplo, para la práctica del diseño de ingeniería hubo de reconstruir con la investigación sobre aprendizaje de la ciencia, tecnología e ingeniería (AAAS, 1993) la progresión del concepto de diseño desde el nivel más elemental posible hasta un nivel de relativo entendimiento de la práctica. En ese sentido se desarrolló el siguiente mapa de la evolución del diseño de ingeniería (ver figura 8):

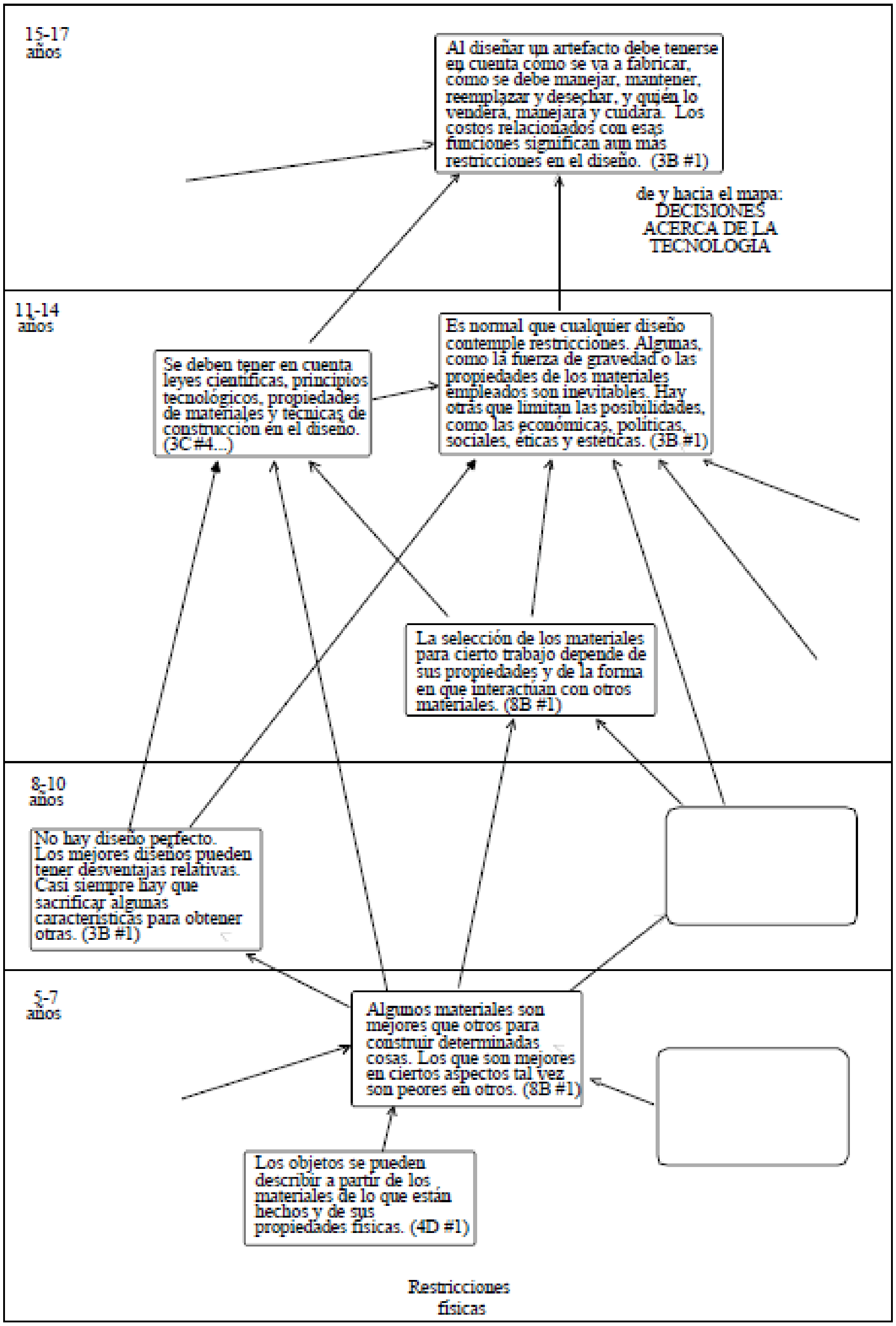


Figura 8. Progresión cognitiva del concepto de diseño de ingeniería vista desde el nivel más elemental a un nivel adecuado de inicio de licenciatura (tomado de Cajas, 2001, p. 251).

Junto a esta visión integral del Diseño de ingeniería debe reconocerse que realmente las Prácticas Sociales son complejas, no son lineales, son contingentes y por ende una representación más adecuada seria la siguiente (ver figura 9):

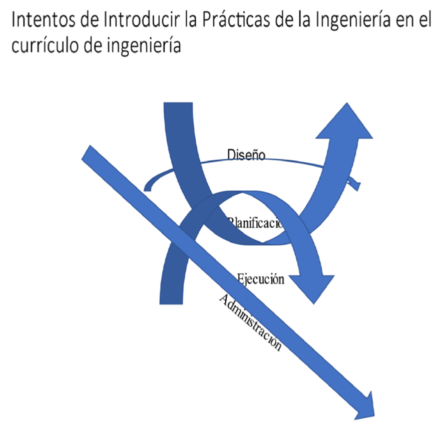


Figura 9. Introducción de prácticas de ingeniería en el currículo de ingeniería desde una visión lineal. Todas las prácticas están permeadas entre sí y no son independiente unas de las otras.

Conclusiones

La ingeniería como toda Práctica Social ha evolucionado en el transcurso del tiempo. De ser una práctica empírica-concreta realizada por ensayo y error, aprendida de forma artesanal; se convirtió en una actividad guiada por ciencia y tecnología, práctica empírico-conceptual. Esto llevó a que se le pudiera introducir en las universidades. El siglo XX fue testigo del inicio de los programas de educación en ingeniería en las universidades, particularmente en Francia y luego en Inglaterra para que posteriormente se consolidaran licenciaturas en ingeniería civil, mecánica, industrial, eléctrica y química. Las nuevas ingenierías son dependientes cada vez más de ciencia y tecnología, pero siguen siendo Prácticas Sociales y por lo tanto esta naturaleza de la praxis debe ser esencial en el nuevo currículo de ingeniería.

La forma de incluir la Práctica Social de la ingeniería en el esquema curricular de las licenciaturas dependerá de los contextos sociales en donde los programas de licenciatura se encuentren. Sin embargo, a la fecha la mayoría de los programas de ingeniería se presentan bajo la concepción de ingeniería como ciencia aplicada. Eso lleva a una cadena curricular en educación en ingeniería que se ha repetido en el mundo, a saber: Ciencias Básicas, Ciencias de la ingeniería y Materias Profesionales. Este modelo curricular no falla en lo que dice, sino en lo que no dice de la práctica real de la ingeniería y debe ser complementado por la inserción curricular de la práctica real de la ingeniería, ya sea en sus formas de diseño, planificación, administración, mantenimiento, etcétera. Ya hay ejemplos en el mundo de la inserción de prácticas de ingeniería en el currículo de ingeniería (Sheppard et al., 2006).

Finalmente, la ingeniería no solamente es una licenciatura en la universidad o en un tecnológico. Es ante todo y más que todo una Práctica Social distribuida en toda la sociedad y está presente desde que nacemos hasta que morimos, siempre, antes, durante y después. Por eso hay que conocer los esfuerzos de introducir a la ingeniería desde antes de la preprimaria hasta en los doctorados, ya sean o no de ingeniería, esto es el entendimiento público de la ingeniería.

La sociedad debe tener un entendimiento mínimo de la ingeniería y no debe esperar milagros de los diseños de los y las ingenieras ya que no hay diseño perfecto. La sociedad debe conocer que hay todo un proceso de sacrificio de determinadas características, por ejemplo, que un buen material requiere un costo más alto (trade-off). Junto a esto, no siempre los y las ingenieras conocen los resultados completos de sus diseños y de sus obras porque hay productos no deseados que no necesariamente eran conocidos sino hasta puesta en marcha la obra. El entendimiento de estas características de la práctica de ingeniería es fundamental para el desarrollo sostenible de nuestros pueblos.

Por eso la ingeniería no puede seguir siendo vista como el conocimiento técnico exclusivo de expertos o la aplicación de la ciencia a los problemas sociales sino como una práctica socialmente distribuida en todo y para todo lo que se hace en una sociedad, íntimamente ligada a las practicas económicas de producción de bienes y servicios y a las prácticas políticas de manejo del poder. Sin ingeniería no hay sociedad como tal y esto debe reflejarse en el nuevo currículo de ingeniería.

Referencias

AAAS -American Association for the Advancement of Science (2023). *Science for All Americans*, Oxford: New York (https://bit.ly/SciencefrAllAmericans, revisado el 11 de mayo 2023).

ABET –American Board of Engineering and Technology, https://www.abet.org, revisado el 11 de mayo 2023.

Bucciarelli, L. (1999). Designing Engineers. MIT, Boston.

Cajas, F. (2001). Alfabetización Científica y Tecnológica: La Transposición Didáctica del Conocimiento Tecnológico. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 243-254.

Cajas, F., Arcos, J., Camacho-Ríos, A., Rodríguez-Gallegos, R. y Torres-

Corrales, D. (2022). La desarticulación matemática en la enseñanza de la ingeniería. Feglinin-Revista oficial de la Federación Global De Profesiones, *III* (22), 24-31. https://federacionglobal.com/FEGLININ/No22/sep2022/vol-3/access.html

Montalvo, E., y Espinoza, E. (2010). *PROYECTO ALFA III USO+I: Experiencia de cooperación y mejora de la pertinencia de las ingenierías en Latinoamérica. Conclusiones para el desarrollo curricular de las ingenierías de América Latina*. Editorial Universidad de Alcalá, España.

Sheppard, S., Colby, A., Matacangay, K, y Sullivan, W. (2006). International Journal of Engineering Education, *22*(3), 429-438.

Trusdell, C. (1968). *Essays in History of Mechanics.* Trent University; Londres

UNESCO (2022). *Las mujeres en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas en América Latina y el Caribe*. Informe del año 2022.

Capítulo 2. Algunas razones por las que los cursos de Cálculo dirigidos a estudiantes de ingeniería deben dejar de centrarse en el concepto de límite

Chapter 2. Some reasons why Calculus courses for engineering students should stop focusing on the concept of limit

José Ismael Arcos Quezada
Universidad Autónoma del Estado de México
ismael_arcos@msn.com

Introducción

El Cálculo, en las versiones originales de Leibniz o Newton, surgió a fines del siglo XVII, cuando conceptos como los de número real, función, límite o continuidad no eran conocidos, mucho menos con el rigor con el que se definen desde hace un siglo. Esas versiones, apuntaladas a lo largo del siglo XVIII, por personajes como Euler, fueron utilizadas en el estudio y la solución de innumerables problemas de ingeniería, y aún hoy, siguen utilizándose, con algunas "actualizaciones" en la modelación y solución de problemas en el contexto de las Ciencias de la Ingeniería. Entonces, ¿por qué en los textos utilizados para la enseñanza del Cálculo, en las escuelas de ingeniería dejaron de ser versiones válidas, siendo sustituidas por la versión del Cálculo que surgió a partir de los trabajos de Cauchy, a principios del siglo XIX?

De acuerdo con Arcos (2019):

> Se suele asociar el origen del Cálculo basado en la definición de límite con la publicación del Curso de Análisis de Cauchy, en el decenio de los 1820. Gradualmente, esa versión del Cálculo fue adquiriendo aceptación en las aulas hasta alcanzar un estatus hegemónico, a principios del siglo XX y a partir de entonces, y hasta fines del mismo siglo, la presentación de los cursos de Cálculo que se ofrecen en las escuelas de ingeniería estuvo firmemente asociada a la definición de límite, con algunas variaciones en cuanto al grado de rigor

> adoptado. Sin embargo, la experiencia en las aulas, así como los innumerables trabajos de investigación en Matemática Educativa que se han hecho durante casi medio siglo, dan cuenta de la gran dificultad para entender el Cálculo bajo esa perspectiva y, más que nada, para entender y utilizar sus conceptos en el contexto de las Ciencias de la Ingeniería (p. 47).

Podemos identificar entonces, un Cálculo surgido en el siglo XVII y abundantemente utilizado y fortalecido durante todo el siglo XVIII debido a Leibniz y Newton, y otro Cálculo con origen en la propuesta de Cauchy de la década de los 20 del siglo XIX. Al respecto, en Grabiner (1981) encontramos lo siguiente:

> ¿Qué es el cálculo? Cuando preguntamos a los matemáticos modernos, obtenemos dos respuestas diferentes. Una respuesta es, por supuesto, que el cálculo es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre funciones, sus derivadas y sus integrales. Su aspecto más importante son sus aplicaciones: a tangentes, áreas, volúmenes, longitudes de arco, velocidades y distancias. El cálculo se puede ver y se puede enseñar como un conjunto de técnicas de resolución de problemas comprendidas intuitivamente, y ampliamente aplicables a la geometría y a la física. […] Sin embargo, el cálculo también es otra cosa: un conjunto de teoremas, basados en definiciones precisas, sobre límites, continuidad, series, derivadas e integrales. Puede parecer que el cálculo se trata de velocidad y distancias, pero su base lógica se encuentra en un tema completamente diferente: el álgebra de desigualdades (p. 1).

Así pues, para Grabiner hay un solo Cálculo, en el que caben, tanto sus aplicaciones en la solución de diversos problemas, como un conjunto de definiciones y teoremas lógicamente estructuradas, continúa:

> Estos dos aspectos diferentes —uso y justificación— del cálculo, coexisten simultáneamente en la actualidad, son en realidad herencias de dos periodos históricos diferentes: los siglos XVIII y XIX. En el siglo XVIII, los analistas se dedicaron a emocionantes y fructíferos descubrimientos sobre curvas, procesos infinitos y sistemas físicos […] Aunque no eran indiferentes al rigor, estos investigadores dedicaron la mayor parte de su esfuerzo a desarrollar y aplicar métodos poderosos, algunos de los cuales no pudieron justificar, para resolver problemas: no enfatizaron la importancia matemática de los fundamentos del cálculo y realmente no vieron los fundamentos como un área importante del esfuerzo matemático.

Ahora bien, la definición rigurosa de límite surgió debido a que, según los estándares de rigor que comenzaron a demandarse a principios del siglo XIX, las versiones originales del Cálculo carecían de la debida consistencia lógica. En esas versiones originales se recurría cosas como cantidades infinitamente pequeñas, puntos que al moverse generan curvas, o cantidades evanescentes. Todas estas ideas fueron descalificadas en la versión moderna del Cálculo y desaparecieron gradualmente de los textos utilizados para su enseñanza.

Sin embargo, esas cantidades infinitamente pequeñas, o infinitesimales, siguieron siendo aceptadas y utilizadas en la ingeniería y en la física, situación señalada por Grattan-Guinness (1991) que menciona que el planteamiento de Cauchy-Weierstrass, basado en los límites, se ha convertido naturalmente en la forma habitual de enseñanza en los cursos dedicados al cálculo o al análisis, pero que en los cursos de mecánica, astronomía, física matemática e ingeniería a menudo se emplea la forma euleriana del cálculo diferencial por su flexibilidad intuitiva en la construcción de los modelos diferenciales de los fenómenos físicos en cuestión. Respecto del escaso entendimiento del modelo basado en el concepto de límite, rigurosamente definido, Grattan-Guinness ahonda:

> En el caso de la enseñanza del cálculo, la hegemonía de los límites ha provocado una esquizofrenia educacional desafortunada y totalmente innecesaria: el cálculo puro no es otra cosa que epsilonitis de pared a pared e ignora la forma diferencial euleriana del cálculo que los cursos de cálculo aplicado con excelente razón a menudo utilizan como elemento básico.

Por *forma euleriana del cálculo diferencial*, Grattan-Guinness se refiere a la versión que Euler propuso, con las ideas Leibniz y Newton como antecedente. Podemos ver, entonces que, en consideración de aceptar o no lo infinitamente pequeño, el Cálculo del siglo XIX, referido por Grabiner, no puede coexistir con el de Leibniz o Newton, puesto que proscribe las cantidades infinitamente pequeñas. Así pues, parece que, si se da prioridad al rigor, deberá renunciarse a las ventajas didácticas de las versiones originales del Cálculo. En cambio, si se aceptan las supuestas inconsistencias lógicas de esas versiones, podrán aprovecharse sus cualidades didácticas, contemplando la necesidad de incorporar cierto rigor en aquellas situaciones que lo ameriten.

Se dice supuestas inconsistencias lógicas, ya que, como sabemos, en la década de los 60, Abraham Robinson creó el análisis no estándar (Dauben, 1995), en donde se da consistencia lógica a un análisis en el que se aceptan las cantidades infinitamente pequeñas. Al respecto, y continuando con el artículo de Grattan-Guinness, este autor concluye, luego del párrafo antes referido, que:

> La situación ha cambiado un poco con la introducción de cursos de cálculo en que se usan infinitesimales basados en el análisis no estándar, generalmente en formas muy diluidas. Pero puede emplearse la forma [euleriana] tradicional, con mucho éxito mientras se admita sin reservas la legitimidad de la diferencial [como incremento infinitamente pequeño de una cantidad variable].

A continuación, se describen argumentan algunas cuestiones en favor de esta manera de proceder en las aulas de las escuelas de ingeniería.

El límite y la regla de L'Hôpital

Si se analizan los textos actuales de Cálculo, se puede percibir que se da suma importancia al cálculo del límite de una función, definida como un cociente, cuando, para un valor de la variable, el numerador y el denominador se anula. En estos textos se recurre, al principio, a funciones racionales y, ocasionalmente irracionales, que por lo general no van más allá de las raíces cuadradas.

Sabiendo que cada expresión (numerador y denominador) se anula para ese valor de la variable, digamos, para $x=a$, se procede a un ejercicio algebraico de factorización, obteniendo como factor común, en numerador y denominador, el binomio $x-a$. Luego, debido a que la definición épsilon delta de límite obliga a considerar valores de la variable diferentes al valor de interés ($x \neq a$), el factor común se cancela en ambas partes, pudiendo entonces obtener por sustitución el valor del límite, a menos de que "la indeterminación persista".

Más adelante, luego de abordar la definición de derivada y los distintos teoremas para calcular "cualquier" tipo de funciones, se presenta la llamada "Regla de L'Hôpital", que permite resolver el mismo problema de la indeterminación $0/0$ para funciones trascendentes. Se nos dice que esta famosa regla se llama así en honor al Marqués de L'Hôpital, quien fuera discípulo de Leibniz, quien en 1696 escribiera (anónimamente) la primera edición de su *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, de manera que L'Hôpital no conocía los límites ni las derivadas, así que no parece muy apropiado ponerle su nombre. Entonces, ¿por qué se le llama así?

En su Análisis (L'Hôpital, 1998), dividido en diez secciones, expone, en la primera de ellas (11 páginas en la versión consultada de un total de 282), las reglas de ese cálculo, dos definiciones, una de las cuales es la de *diferencia*, seguidas de lo que serían las reglas para obtener la diferencial de las funciones algebraicas (las funciones trascendentes fueron introducidas por Euler, más de medio siglo después. Luego, en las siguientes siete secciones expone las aplicaciones del cálculo diferencial en la solución de algunos problemas geométricos relativos a curvas en el plano.

Finalmente, en la novena sección aborda la "Solución de algunos problemas que dependen de los métodos precedentes" y en la décima una "nueva manera de servirse del cálculo de las diferencias en las curvas geométricas, donde se deduce el método de Descartes y Hudde". La novena sección comienza con el siguiente:

> Sea *AMD* una línea curva ($AP=x$, $PM=y$, $AB=a$) tal que el valor de la ordenada esté expresado por una fracción, en la cual el numerador y el denominador se vuelvan cada uno cero cuando $x=a$; es decir, cuando el punto *P* caiga sobre el punto dado *B* (figura 1). Se pregunta cuál debe ser entonces el valor de la ordenada *BD.*

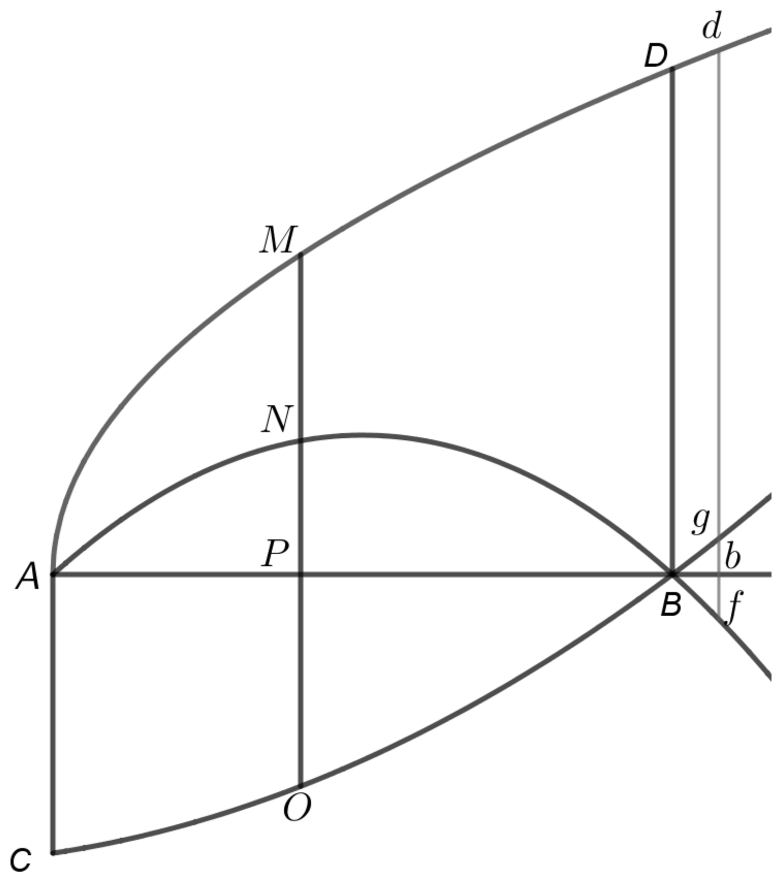


Figura 1. Representación del problema.

Procediendo inmediatamente a su solución (figura 2).

Siendo ANB y COB dos líneas curvas conocidas que tienen a AB como eje común, y tales que la ordenada PN exprese el numerador y la ordenada PO del denominador de la fracción general que conviene a todas las PM, de modo que:

$$PM = \frac{AB \times PN}{PO}$$

Es claro que estas dos curvas se intersectarán en el punto B, dado que, por la suposición, PN y PO se vuelven cada una cero cuando el punto P cae en B. Planteado eso, si se concibe una ordenada bd infinitamente cercana de BD y que intersecta a las líneas curvas ANB y COB en los puntos f y g, se tendrá

$$bd = \frac{AB \times bf}{bg}$$

Lo cual no difiere de BD. Entonces el problema consiste en encontrar la razón entre bg y bf. Ahora bien, es claro que al volverse AB la Abscisa AP, las ordenadas PN y PO se vuelven nulas, y que al volverse Ab la abscisa AP, se vuelven bf y bg. De donde se sigue que estas ordenadas, las mismas bf y bg, hacen la diferencia de las ordenadas en B y b con relación a las curvas ANB y COB, y por lo tanto, si se toma la diferencia del numerador y se divide por la diferencia del denominador, después de haber hecho $x=a=Ab=AB$, se tendrá el valor buscado de la ordenada bd o BD. Lo cual se quería encontrar.

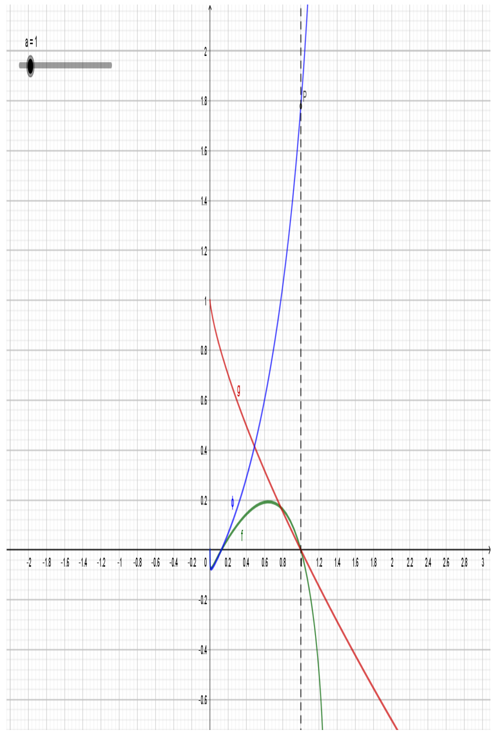


Figura 2. Solución del problema.

Como se mencionó anteriormente, en la primera sección del Análisis, L'Hôpital da la definición de diferencia (ahora diferencial), como el infinitamente pequeño de una cantidad variable, así como el requerimiento de que "se puedan tomar indistintamente una por la otra a dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña", lo que, en los textos actuales de ciencias de la ingeniería, se procede diciendo que la diferencia entre las cantidades es "despreciable" y, por lo tanto, se puede eliminar. En la explicación anterior se han tomado en cuenta ambas cosas, la definición y el requerimiento (suposición o postulado, en el texto de L'Hôpital).

Después de la explicación, L'Hôpital expone un ejemplo, en el que numerador y denominador son funciones irracionales, por lo que tiene que aplicar la serie binomial, conocida para ese entonces:

Ejemplo 1. Sea

$$\frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

Es claro que cuando , el numerador y el denominador de la fracción se vuelven iguales a cero. Por lo cual se tomará la diferencia del numerador,

$$\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3 - x^4}} - \frac{a^2dx}{3\sqrt[3]{ax^2}}$$

y se le dividirá entre la diferencia del denominador,

$$-\frac{3a\,dx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$$

después de haber hecho $x=a$, es decir, que se dividirá $-\frac{4}{3}a\,dx$ entre $-\frac{3}{4}dx$, lo cual da $\frac{16}{9}a$ para el valor buscado de *BD*.

Observemos que, en el planteamiento del problema, L'Hôpital dice que quiere saber el valor de la ordenada *BD*, es decir, se propone saber por dónde pasa la gráfica de la función propuesta, de manera que, para el ejemplo resuelto, puede decirse que la curva pasa por el punto $(x,y) = \left(a, \frac{16}{9}a\right)$. Si hacemos $a=1$, el problema sería encontrar por donde pasa la gráfica de $y = \frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$, cuando $x=1$, y la respuesta obtenida es: por el punto $(x,y) = \left(1, \frac{16}{9}\right)$. Si usamos un software de graficación en el plano, como GeoGebra, siendo $f(x) = \sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}$, $g(x) = 1 - \sqrt[4]{x^3}$ y $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ obtendremos las curvas mostradas en la figura 2. El punto buscado sería $P = \left(1, \frac{16}{9}\right)$.

Desde la perspectiva del Cálculo escolar, tal y como se presenta en las aulas, en el ejemplo propuesto por L'Hôpital se habría pedido: Calcular: $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$, y la respuesta debió haber sido $\frac{16}{9}a$:

En estos textos, el ejercicio se presenta y resuelve, con un lenguaje totalmente simbólico, sin aludir a un contexto gráfico. Y si se hiciera la interpretación gráfica, se diría que La función $\phi(x) = \frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$ presenta una discontinuidad evitable, cuando $x=1$. Esto, a pesar de que, en la actualidad se dispone de software gratuito para la graficación de curvas en el plano, de manera que pudiera hacerse la gráfica, indicando que el punto $P = \left(1, \frac{16}{9}\right)$ no es parte de la gráfica de ϕ, ya que la división entre cero no está definida.

En cualquier caso, y en respaldo de la perspectiva de L'Hôpital, si en un fenómeno de interés de la ingeniería (y me gustaría saber de algunos) se presenta una situación como la planteada por L'Hôpital, ¿qué diferencia hay entre suponer que el punto existe, y afirmar que no existe?

Por último, llama la atención que, desde el primer ejemplo, L'Hôpital elige uno en el que se requiere un trabajo algebraico, de no poca dificultad, como para mostrar la potencia de su método, situación más o menos característica de la época.

Actualmente, cabe reflexionar si, en un curso dirigido a estudiantes de ingeniería, es conveniente pedir a los alumnos una gran habilidad en el manejo simbólico, si el docente no está seguro de que, antes que nada, los conceptos importantes han sido aprendidos.

El límite, funciones de punto y el medio continuo

En ciertas situaciones que se presentan en las Ciencias de la Ingeniería, se tiene la necesidad de definir una determinada función en cualquiera de los puntos de una cierta región del espacio, a la que suele llamarse función de punto. En tales situaciones solía valerse del concepto de límite para establecer la definición. Así, en libros de termodinámica o mecánica de fluidos, podía recurrirse al límite cuando se deseaba definir alguna propiedad de un fluido, como la densidad, o su recíproco, el volumen específico. Veamos, por ejemplo, lo que se decía en el texto de Ingeniería Termodinámica de Burghardt (1984), en el capítulo 2, en el que se daban algunas definiciones:

> Existen varias propiedades bien conocidas, pero que debemos definir rigurosamente para saber con exactitud lo que se desea significar con ellas. Volumen específico es el volumen de una sustancia dividido entre su masa. Pero ¿hay algún punto donde esto deje de ser cierto? ¿Tendría significado el volumen específico si se seleccionara una sola molécula para representar la sustancia que vamos a medir? No. En primer lugar, el volumen específico es un fenómeno macroscópico; en segundo, para que una propiedad sea macroscópica debe existir un medio continuo; es decir, las propiedades macroscópicas tienen que variar continuamente de una a otra sin interrupciones. Decimos región y no punto porque este último concepto geométrico (infinitesimal) no puede contener partículas de una sustancia dada (¿o sí?); de esta manera, el espacio más pequeño que puede ocupar una sustancia macroscópica, sin perder sus propiedades también macroscópicas es una región con un volumen característico $\delta V'$. Si el volumen específico se designa por v, y δV es un volumen pequeño de sustancia, con una masa δm, entonces $v = \lim_{\delta V \to \delta V'} \frac{\delta V}{\delta m}$.

Observamos, en primer lugar, que, al contrario de lo que sucede con la definición rigurosa de límite, el contexto físico nos impide hacer δV "tan pequeño como se quiera", lo que lleva al autor a asumir el fluido como un medio continuo, en un contexto físico, aunque, con rigor matemático, no lo sea. El segundo asunto es que, al hablar de un "volumen característico", para evitar considerar un volumen prácticamente vacío, hace innecesario el recurso del límite, ya que, en tal caso, para determinar el volumen específico en un punto, bastaría con decir que, siendo $\delta V'$ el volumen circundante (esfera o cubo con centro en el punto), y $\delta m'$ la masa contenida en tal volumen, el volumen específico en ese punto sería $\frac{\delta V'}{\delta m'}$.

Resulta interesante que, enseguida del texto arriba transcrito, el autor continúe diciendo que: La ecuación anterior es precisa, pero resultaría tedioso trabajar con ella. Si la sustancia del sistema, de la cual tratamos de calcular el volumen específico, tiene una magnitud finita y es homogénea, entonces el volumen específico en una parte del sistema será el mismo que en cualquiera otra de sus partes, y para un volumen y una masa del sistema, el volumen específico será:

$$v = \frac{V}{m}$$

Indicando, implícitamente, que en adelante se trabajará sólo con sustancias homogéneas. Este apunte confirma que el uso del límite resultó totalmente innecesario.

Si nos movemos dos décadas en el tiempo, nos encontramos con el texto de Mecánica de fluidos de White (2008), en el que, para definir la densidad de un fluido (figura 3), nos dice:

Hemos utilizado ya términos técnicos tales como presión y densidad del fluido sin una discusión rigurosa de su definición. Sabemos que los fluidos son agregaciones de moléculas, muy separadas en los gases y más próximas en los líquidos. La distancia entre las moléculas es mucho mayor que el diámetro de las mismas. Las moléculas no están fijas en una red, sino que se mueven libremente. Por ello, la densidad, o masa por unidad de volumen, no tiene un significado preciso, pues el número de moléculas en el interior de un volumen cualquiera cambia continuamente. Este efecto llega a carecer de importancia si la unidad de volumen es mucho mayor que el cubo del espaciado molecular, ya que el número de moléculas contenidas permanecerá prácticamente constante a pesar del considerable intercambio a través de sus contornos. Por otro lado, si la unidad de volumen escogida es demasiado grande, puede haber una variación notable en la distribución global de sus partículas. Esta situación está ilustrada en la figura, donde la "densidad" calculada a partir de la masa molecular δm de un volumen dado δV se grafica en función del tamaño de la unidad de volumen. Hay un volumen límite δV^* por debajo del cual las variaciones moleculares pueden ser importantes y por encima del cual las variaciones macroscópicas también lo pueden ser. La densidad de un fluido se define de modo óptimo como:

$$\rho = \lim_{\delta V \to \delta V^*} \frac{\delta m}{\delta V}$$

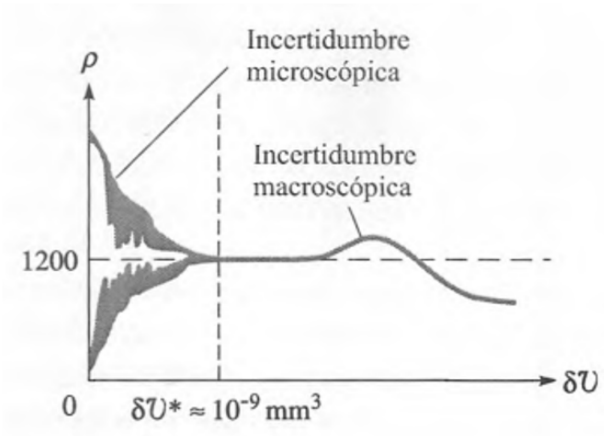


Figura 3. Tomada de White (2008).

Observemos que este autor da una definición bastante parecida a la del anterior, pero este incluye una gráfica (figura 3) en la que muestra que, para volúmenes muy pequeños, aparece una incertidumbre microscópica, debido al enrarecimiento, mientras que, para volúmenes demasiado grandes, también se tiene una incertidumbre, en este caso debida a la variación de la distribución global de las moléculas, pudiendo estar "más apretadas" en algunas zonas y menos en otras.

En este caso, es la gráfica la que hace evidente lo innecesario del recurso del límite, ya que, al aceptar que existe, no un solo valor, sino todo un intervalo de confiabilidad entre ambas zonas de incertidumbre, para establecer la definición bastaría con indicar el valor del "volumen límite" δV^* (contenido en ese intervalo de confiabilidad) y usar ese valor para la definición, tal y como se indicó con el texto anterior. Este autor, incluso, indica un valor para ese volumen límite:

> El volumen límite δV^* es aproximadamente 10^{-9} mm^3 para todos los líquidos y gases a presión atmosférica. Por ejemplo, 10^{-9} mm^3 de aire en condiciones normales contienen aproximadamente 3×10^7 moléculas, lo cual es suficiente para definir una densidad prácticamente constante de acuerdo con esta ecuación.

Después de lo cual, termina diciendo:

> La mayor parte de los problemas en la ingeniería están relacionados con dimensiones físicas mucho mayores que este volumen límite, de modo que la densidad es esencialmente una función de punto y las propiedades del fluido pueden considerarse como variables continuas en el espacio […] En estas condiciones, se dice que el fluido es un medio continuo, lo cual significa que la variación de sus propiedades es tan suave que se puede utilizar el cálculo diferencial para analizarla. En todos los estudios incluidos en este libro consideraremos válida esta premisa.

Para concluir con esta sección, vamos a considerar un texto más actual, el de Termodinámica de Çengel (2015), en el que, al referirse al continuo, encontramos lo siguiente:

> La materia está constituida por átomos que están igualmente espaciados en la fase gas. Sin embargo, es muy conveniente no tomar en cuenta la naturaleza atómica de una sustancia y considerarla como materia continua, homogénea y sin ningún hueco, es decir, un continuo. La idealización de continuo permite tratar las propiedades como funciones puntuales y suponer que varían en forma continua en el espacio sin saltos discontinuos. Esta idealización es válida siempre y cuando el tamaño del sistema analizado sea grande en relación con el espacio entre moléculas. Este es el caso de casi todos los problemas a excepción de algunos especializados. La idealización del continuo está implícita en muchos enunciados, como “la densidad del agua en un vaso es la misma en cualquier punto”.

Así pues, vemos que este autor ya no considera necesario recurrir al límite para hablar de una función de punto. Tampoco considera necesario precisar el valor del volumen de referencia (característico o límite en los autores anteriores), aunque, más adelante, da algunos datos para contextualizar cuantitativamente sus argumentos:

> Para tener una idea de la distancia que hay a nivel molecular, considere un recipiente lleno de oxígeno en condiciones atmosféricas. El diámetro de la molécula de oxígeno es de alrededor de 3×10^{-10} m y su masa es de 5.3×10^{-26} kg. Asimismo, la trayectoria libre media del oxígeno a una presión de 1 atm y C es 6.3×10^{-8} m (unas 200 veces su diámetro) antes de chocar con otra molécula. También hay cerca de 3×10^{16} moléculas de oxígeno en el pequeño volumen de 1 mm^3 a 1 atm de presión y 20° C.

De esta manera, para definir la densidad, simplemente indica: la densidad se define como la masa por unidad de volumen $\rho = \frac{m}{V}$ (kg/m^3)

El recíproco de la densidad es el volumen específico v, que se define como el volumen por unidad de masa. Es decir: $v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$, y termina definiendo la densidad en un punto, considerando un "volumen diferencial", es decir, un volumen infinitamente pequeño, en lugar de recurrir al límite:

> Para un elemento de volumen diferencial de masa δm y volumen δV, la densidad se puede expresar como $\rho = \delta m/\delta V$.

Así pues, se puede afirmar que, el recurso del concepto de límite, en la definición de funciones de punto, es innecesario e incorrecto.

Los *límites infinitos* y las *asíntotas*

Otra manera en la que se aborda el "cálculo de límites" en los textos "tradicionales", es el tema de los límites infinitos, el cual, nuevamente se presenta, igual que en el caso de la "discontinuidad evitable", con un lenguaje totalmente simbólico, soslayando lo verbal y lo gráfico.

Así, por ejemplo, para cualquier función de la forma $f(x) = \frac{x^n+c}{x}$, siendo n un número natural, mayor que 1, y un número real, si se pregunta por el límite de esta función, cuando x tiende a infinito, la respuesta será la misma:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n + c}{x} = \infty$$

Aun cuando el comportamiento de la función, para valores cada vez más grandes de la variable, sea distinto para cada valor de n. De hecho, la función tiene como asíntota a $g(x) = x^{n-1}$, que depende de n.

Es decir, la información que obtenemos con la respuesta $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n+c}{x} = \infty$, es insuficiente si se desea describir, con alguna precisión, el comportamiento de la función. Veamos, por ejemplo, lo que encontramos en textos de electromagnetismo cuando se estudia el tema del campo eléctrico.

En el texto de Física para la ciencia y la tecnología, de Tipler (2000), al considerar el campo eléctrico debido a una carga lineal infinita, se obtiene que el valor del campo, en un punto situado a una distancia , de una línea finita cargada, de longitud (figura 4), está dado por:

$$E_l(y) = \frac{2k\lambda}{y}\,\mathrm{sen}\,\theta_0 = \frac{2k\lambda}{y}\frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + y^2}}$$

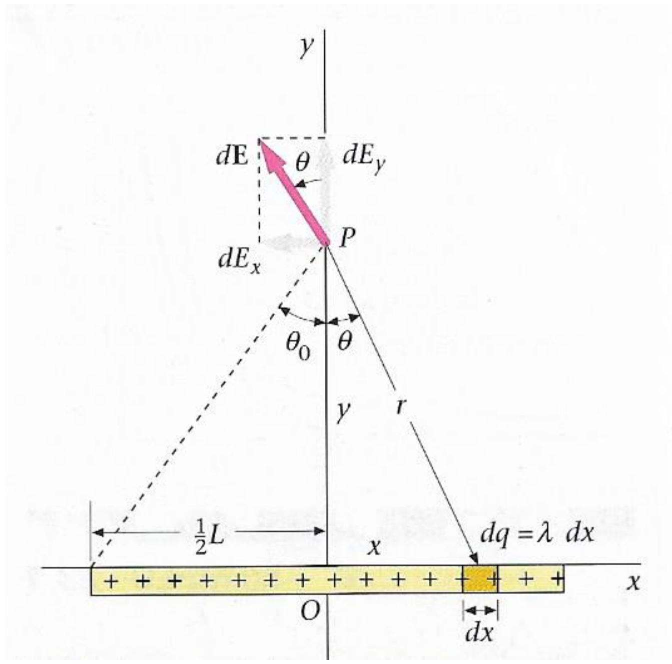


Figura 4. Tomada de Tipler (2000).

A partir de esta ecuación, para puntos situados muy lejos de la línea, es decir, para $y>>L$ (lo que resulta más o menos equivalente a tomar el límite cuando y→∞), y recurriendo a la serie binomial, se obtiene que:

$$E_l(y) = \frac{k\lambda L}{y\sqrt{L^2 + y^2}} = k\lambda L y^{-1}\left[y^2\left(1 + \frac{L^2}{4y^2}\right)\right]^{-1/2}$$

$$E_l(y) = k\lambda L y^{-2}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{4y^2}\right) + O(y^{-4})\right]$$

Al considerar que es muy grande (respecto de L), los términos dentro del paréntesis, luego de 1 resultan despreciables, y $E_l(y) = \frac{k\lambda L}{y^2}$. Como $Q = \int dq = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda\, dx = \lambda L$ es la carga total de la línea, este resultado nos indica que, en puntos situados muy lejos de la línea, el campo es el mismo que tendría si en lugar de la línea cargada se tuviera una carga puntual $Q=\lambda L$ (figura 5). Es decir:

$$E_p(y) = \frac{k\lambda L}{y^2}$$

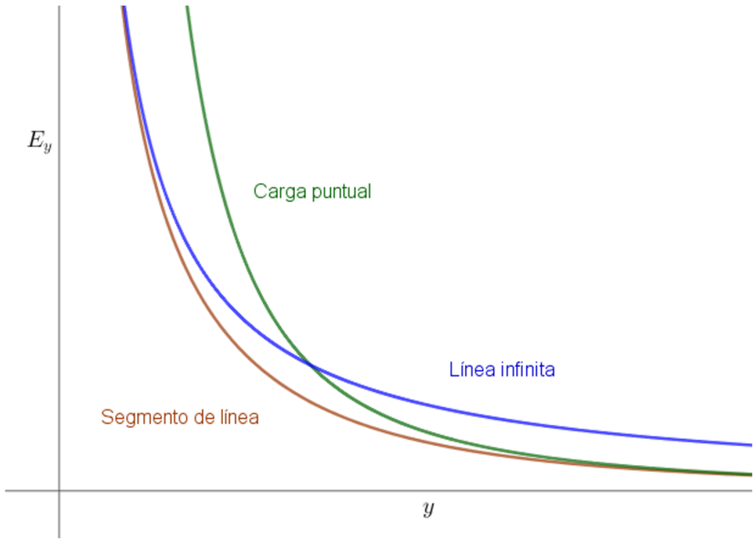


Figura 5. Construcción de la situación física

Si, en cambio se considera una línea infinita, tendríamos (figura 4) que $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen} \theta_0 = 1$, y al sustituir en (a), obtenemos:

$$E_l(y) = \frac{2k\lambda}{y}$$

Si se traza la gráfica de las funciones (campo eléctrico en términos de la distancia) (a), (b) y (c), se obtienen las curvas mostradas en la figura 5, en las que leemos que, para valores pequeños de y , respecto de L, el segmento se puede considerar como infinitamente largo, mientras que, para valores muy grandes de y, la línea cargada se puede considerar como una carga puntual. Estos resultados son *invisibles* si sólo se calcula el límite cuando y tiende a cero (por la derecha) o cuando tiende a infinito.

El límite y la velocidad instantánea

En los textos de Mecánica, al comenzar a estudiar de la cinemática de una partícula, se definen la velocidad y la aceleración para un movimiento rectilíneo. Usualmente estas cantidades se definen como derivadas, interpretadas como razones de cambio. Así, si una partícula se desplaza a lo largo de un eje x, su posición, para cualquier tiempo t queda definida por una función de posición

$x(t)$, la razón de cambio de esa posición x, respecto del tiempo, por supuesto, será la velocidad de la partícula $v = \frac{dx}{dt}$, y la razón de cambio de esta será la aceleración . En un texto de Cálculo, lo primero que se advertiría, es que lo que "parecen" cocientes $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dv}{dt}$, en realidad no lo son, ya que dx, dv y dt no tienen un significado de manera aislada (no se aceptan las cantidades infinitamente pequeñas), en realidad $\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$donde Δx y Δt son incrementos finitos de x y t, respectivamente, de manera que no se puede considerar, de manera separada a dx y dt.

Sin embargo, en un texto de Mecánica, aun cuando la velocidad se defina como $v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, casi inmediatamente se procede a "separar" las variables, es decir, la velocidad es el cociente de las diferenciales de x y t. Consideremos, como ejemplo, dos textos de Dinámica de J. L. Meriam, el primero es una edición en inglés, de 1952 y el segundo, una traducción al español, de 1998, en donde L. G. Kraige es coautor. En Meriam (1952) leemos:

> …La velocidad instantánea v en cualquier posición sobre su trayectoria es la razón instantánea temporal de cambio del desplazamiento o
>
> $$v = \frac{ds}{dt}$$
>
> …La aceleración instantánea *a* de un punto en cualquier posición sobre la trayectoria es la razón temporal instantánea de cambio de la velocidad
>
> $$a = \frac{dv}{dt} \qquad \text{o} \qquad a = \frac{d^2s}{dt^2}$$
>
> Eliminando entre estas ecuaciones, se obtiene una relación entre desplazamiento, velocidad y aceleración
>
> $$v\,dv = a\,ds$$

Como vemos, no se intenta dar una justificación para proceder de tal manera, es decir, se acepta "naturalmente" que la velocidad y la aceleración son cocientes de diferenciales. Por otra parte, en Meriam y Kraige (1998), encontramos que, luego de definir la velocidad media y la aceleración media, para un intervalo finito (de tiempo) Δt, mediante $v_{med} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ y $a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, respectivamente, se indica:

…A medida que Δt se va haciendo menor y tiende a cero en el límite, la velocidad media tiende a ser la velocidad instantánea del punto, la cual es $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, o sea

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

…A medida que se va haciendo menor y tiende a cero, la aceleración media tiende a ser la aceleración instantánea del punto, la cual es $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, o sea

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \text{ o } a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$$

...Eliminando el tiempo entre estas últimas ecuaciones, resulta una ecuación diferencial que relaciona el desplazamiento, velocidad y aceleración:

$$v\,dv = a\,ds \text{o bien } \dot{s}\,d\dot{s} = \ddot{s}\,ds$$

En esta edición, los autores si incluyen una breve explicación, mediante un llamado a pie de página, en este último párrafo, en donde se indica:

Las cantidades diferenciales se pueden multiplicar y dividir de la misma forma que las cantidades algebraicas.

Así pues, los autores utilizan la derivada como un límite, pero, inmediatamente después, como un cociente de diferenciales, es decir, de cantidades infinitamente pequeñas.

La integración y el asunto de la masa

En los textos actuales de Cálculo, el proceso de integración se presenta luego de una larga exposición teórica, fundamentada en las sumas de Riemann, que ocupa buena cantidad de tiempo en las aulas (y espacio en los libros), y resulta poco entendible para la mayoría de los alumnos.

En cursos dirigidos a estudiantes de ingeniería, es posible hacer una presentación menos cargada de teoría, y que resulte más congruente con la manera en la que se utiliza en los textos de Ciencias de la Ingeniería. En Arcos (2021), por ejemplo, se describe como, partiendo del problema de determinar la masa de un determinado objeto geométrico, que puede ser una barra delgada, un alambre curvilíneo, una placa plana, un cascarón alabeado, o un sólido, se puede concebir cada una de las “distintas” integrales; la integral simple, la integral curvilínea, la integral de área, la integral de superficie y la integral de volumen. Ello, a partir de una idea presente en la versión leibniziana del Cálculo (que se ilustra en la figura 6):

Si la diferencial de una cantidad (entera) P es una parte infinitamente pequeña (elemento) dP, de ella, y si se conoce una expresión para ese elemento, la suma de todos esos diferenciales o elementos (en número infinito), es decir, la integral, dará el valor de la cantidad entera.

Así, por ejemplo, si se desea calcular la masa de una masa delgada (fig. 6a), no homogénea, en la que, suponemos, está definida una función de densidad lineal $\delta(x)$ (masa por unidad de longitud), se elige, como elemento a la masa de la porción infinitesimal de la barra, de longitud dx, de manera que $dm = \delta(x)dx$ y:

$$m = \int dm = \int_a^b \delta(x)\, dx$$

Para la masa de un alambre curvilíneo, no homogéneo (fig. 6b), con una función de densidad $\delta(x,y,z)$, el elemento de longitud de arco sería $ds = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\mathrm{f}(t+dt) - \mathrm{f}(t)\| = \left\|\frac{\mathrm{f}(t+dt)-\mathrm{f}(t)}{dt}\right\| dt = \|\mathrm{f}'(t)\|dt$, por lo que, el elemento de masa sería: $dm = \delta(\mathrm{r})ds = \delta\big(\mathrm{f}(t)\big)\|\mathrm{f}'(t)\|dt$ y la masa del alambre completo: $m = \int_C \delta(\mathrm{r})\, ds = \int_a^b \delta[\mathrm{f}(t)]\, \|\mathrm{f}'(t)\|\, dt$

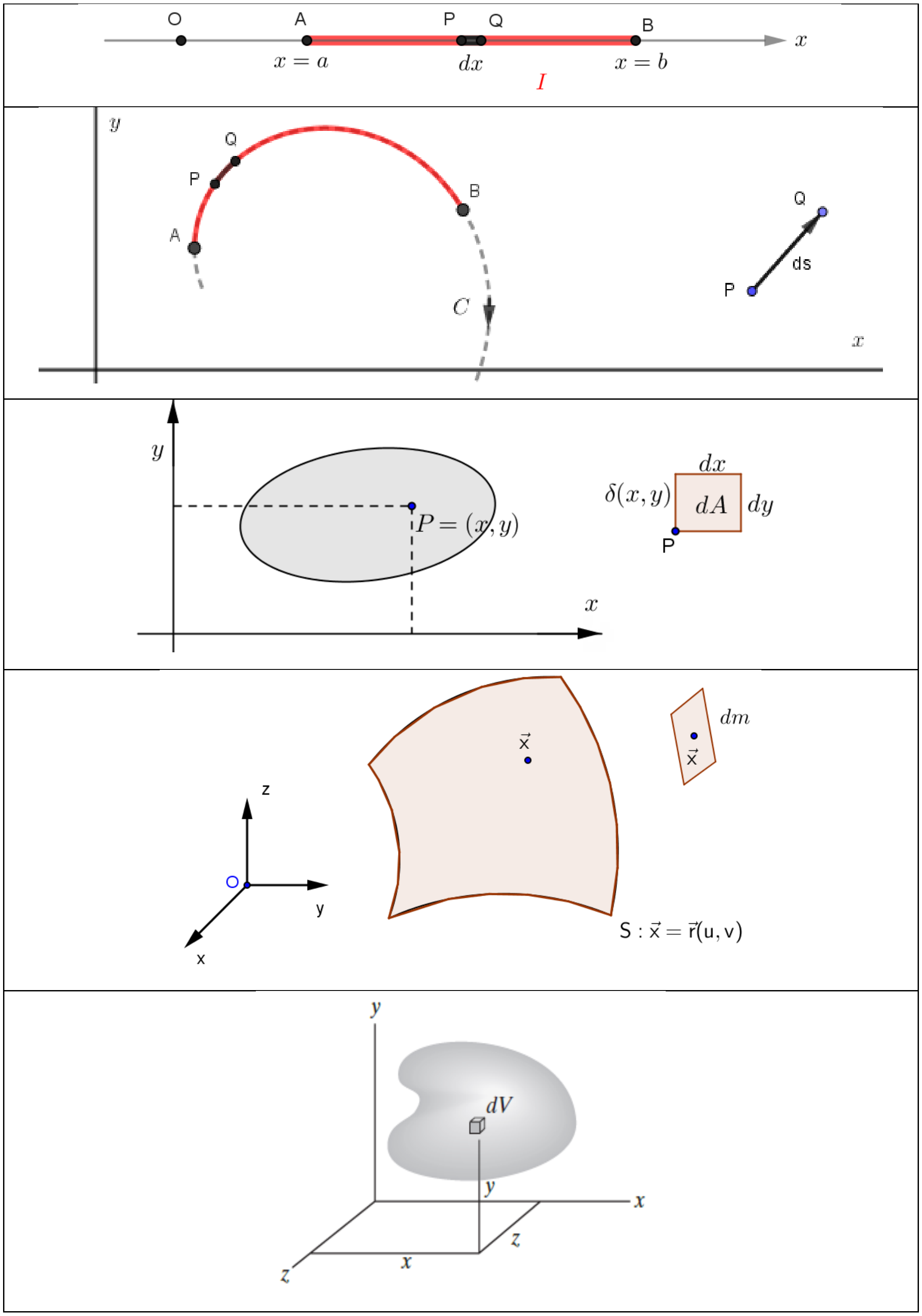


Figura 6. Ilustración del cálculo de masa en distintos casos.

Para la masa de una placa no homogénea, que ocupa una región R sobre el plano xy, y en la que se supone definida una función de densidad (superficial) $\delta(x,y)$, el elemento de área será $dA=dx\ dy$, y el de masa $dm=\delta(x,y)\ dA$, por lo que la masa de la placa sería:

$$m = \int_R dm = \int_R \delta(x,y)\, dA$$

De manera similar se procede con los otros dos casos.

Referencias

Arcos, I. (2019). Una presentación de los conceptos del cálculo, en escuelas de ingeniería, no centrada en la definición de límite. *El Cálculo y su Enseñanza*, *12*(1), 46-59. Doi: https://doi.org/10.61174/recacym.v12i1.33

Arcos, I. (2021). *Cómo medir objetos geométricos y calcular su masa* en C. Cuevas y M. Martínez (Coord.), *La enseñanza del cálculo, las ciencias y las matemáticas* pp. 142-148). Universidad Autónoma del Estado de México. https://eical12.recacym.org/wp-content/uploads/2021/08/ensenanza-de-la-Matematicas.pdf

Burghardt, M. (1984). *Ingeniería termodinámica*. Ciudad de México: Harla.

Çengel, Y., Boles, M. (2015). *Termodinámica*. Ciudad de México: McGraw Hill.

Dauben, J. (1995). *Abraham Robinson. The creation of nonstandar análisis. A personal and mathematical odyssey*. Princeton Universtiy Press.

Grabiner, J. (1981). *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. Cambride Mass: MIT Press.

Grattan-Guinness, I. (1991) ¿Qué es y qué debería ser el cálculo?, *Mathesis*, 7(3), 363-387.

L'Hôpital, G. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. Ciudad de México: Mathema.

Meriam, J. (1952). *Mechanics part II. Dynamics*. Jonh Wiley and Sons.

Meriam, J., y Kraige, L. (1998). *Mecánica para ingenieros. Dinámica*. Reverté.

Tipler, P. (2000). *Física para la ciencia y la tecnología. Volumen 2*. Reverté.

White, F. (2008). *Mecánica de fluidos*. McGraw-Hill.

Capítulo 3. Perspectivas teórico - metodológicas para la formación matemática de ingenieros

Chapter 3. Theoretical-methodological perspectives for mathematical education of engineers

Saúl Ernesto Cosmes Aragón*
Jesús Eduardo Hinojos Ramos
Diana del Carmen Torres Corrales
Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON)
*saul.cosmes@itson.edu.mx

Introducción

La formación matemática de ingenieros es atendida desde distintas disciplinas. Desde la Educación en la Ingeniería una revisión de la literatura reporta que las prácticas innovadoras para la enseñanza de las matemáticas enfocadas en el estudiante se engloban en cuatro tópicos: la modelización, el empoderamiento, el uso de diversas técnicas de aprendizaje y la evaluación formativa. Los autores mencionan que el currículum de matemáticas para ingeniería ha tenido una evolución constante desde las ideas germinales de los matemáticos referentes a la didáctica hacia el desarrollo de teorías y metodologías específicas (Pepin et al., 2021).

Desde la Matemática Educativa (Didáctica de la Matemática o Educación Matemática, según la escuela de pensamiento y ubicación geográfica), una revisión de la literatura del periodo 1968-2020 señala que la investigación con estudiantes de ingeniería se desarrolla principalmente en las ciencias básicas, mientras que en ciencias de la ingeniería y en asignaturas profesionales es escasa. Lo anterior, refiere a la organización curricular del modelo politécnico francés por bloques de asignaturas: los dos primeros años se cursa el bloque de ciencias básicas que incluye asignaturas de matemáticas, física, entre otras; el segundo y tercer año se cursa el bloque de ciencias de la ingeniería; mientras que el cuarto y quinto año se cursa el bloque de asignaturas profesionales que son formación especializada (Torres-Corrales e Hinojos, en prensa).

Por lo anterior, se plantea como objetivo: *exponer los resultados de tres perspectivas teórico-metodológicas que problematizan la formación de ingenieros en asignaturas profesionales desde la Matemática Educativa*; donde problematizar se refiere a tomar en consideración las características de la ingeniería para el diseño de la investigación, el análisis y discusión de los mismos resultados.

Desarrollo

Para dar respuesta al objetivo de investigación se abordan dos preguntas guías: ¿cómo identificar la matemática en la asignatura profesional?, ¿cómo problematizar teórica y metodológicamente la relación entre la matemática y la ingeniería?

Perspectiva 1

En la formación de ingenieros es importante realizar investigaciones donde se evidencie el uso de la matemática escolar. Dicho uso puede considerarse dentro de la formación matemática del estudiante de ingeniería, dentro de su formación en ciencias de la ingeniería o dentro de su formación profesional. Otra forma de analizar los usos de la matemática es a través de considerar los lugares de trabajo en el ejercicio profesional del ingeniero.

Cosmes-Aragón y Montoya-Delgadillo (2021) reportan un estudio donde investigaron sobre conexiones de la matemática con la ingeniería en el área de formación profesional del estudiante de Ingeniería Civil, específicamente en la asignatura de Análisis Estructural de una universidad chilena. Para ello caracterizaron el trabajo matemático en problemas de la asignatura, desde el enfoque de los espacios de trabajo matemático extendido y la modelización. Como parte de su recolección de datos, realizaron observaciones de clase no participante bajo la metodología cualitativa con el método del estudio de caso. Donde el caso fue el programa de Ingeniería Civil de una universidad chilena.

Dentro de las líneas de investigación en el marco de la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) se encuentra analizar relaciones entre la matemática y otras disciplinas. Al respecto, Moutet (2016) realiza una extensión al ETM para analizar relaciones entre la matemática y la física. Cosmes- Aragón y Montoya-Delgadillo (2021) basado en la extensión realizada por Moutet (2016), realizan una extensión del ETM para analizar relaciones entre la matemática y la ingeniería; realizan un diálogo entre el ETM extendido y el ciclo de modelización propuesto por Borromeo-Ferri (2006). La modelización matemática en la construcción de conocimiento matemático puede ser vista desde distintos enfoques teóricos. Algunas líneas de investigación consideran a la modelización como un proceso, el cual asocian con un ciclo que a, su vez, visto como un insumo metodológico para reconstruir cognitivamente las rutas de trabajo del estudiante/profesor durante la modelización del problema (Borromeo-Ferri, 2010).

Con la intención de analizar de una manera más fina los objetos matemáticos utilizados en el proceso de solución de los problemas, se hace necesario tomar en cuenta la construcción cognitiva del trabajo matemático con apoyo de una teoría externa a la asociada a la modelización. En este sentido, Cosmes-Aragón y Montoya-Delgadillo (2021) conectan el ciclo de modelización con la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático extendido a la ingeniería para así analizar el proceso de modelización. De esta manera conectan modelización y ETM extendido a través de tomar en cuenta cada etapa del ciclo de modelización y utilizar el ETM para analizar los ciclos asociados a la modelización.

Desde la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak y Richard, 2014), es posible construir conexiones matemático-ingenieriles desde 3 tipos de espacios de trabajo matemático: (1) El espacio de trabajo matemático de referencia para la ingeniería en el que se indaga sobre dichas conexiones considerando literatura especializada sobre la o las áreas de interés, por ejemplo, en el caso del análisis de estructuras reportado en Cosmes Aragón y Montoya Delgadillo (2021) se considera el saber relacionado con libros de consulta; (2) Un espacio de trabajo idóneo para la ingeniería; en este tipo de espacio el acceso puede ser a través del profesor que imparte clases de ingeniería, ya sea en escenarios de asignaturas de la especialidad donde imparte clases o en escenarios donde el profesor realiza un diseño de contenidos; y (3) Un espacio de trabajo personal para la ingeniería, el cual puede asociarse al trabajo de los estudiantes.

Montoya-Delgadillo y Cosmes-Aragón (2021) destacan la relevancia de considerar las conexiones e identificar objetos matemáticos con ingeniería vía la modelización. Para ello utilizan cuatro momentos de trabajo en la clase de Análisis Estructural y asocian cada momento de clase con el ciclo de modelización (Borromeo, 2009). Ante ello, y desde un punto de vista metodológico, realizan conexiones entre el trabajo matemático y el ingenieril basados en momentos de clase asociados con la modelización matemática articulando el ETM extendido y el ciclo de modelización, como sigue:

Se considera la relación entre los planos epistemológicos de la matemática y la ingeniería articulados con la dimensión cognitiva, esto a través de tres génesis: (1) la génesis semiótica, donde los signos de la matemática y de la ingeniería se interpretan para hacer tangibles los objetos matemático-ingenieriles vía un proceso semiótico; (2) la génesis instrumental; aquí, los artefactos ya sean del tipo simbólicos o tecnológicos son utilizados para construir soluciones a los problemas, y (3) una génesis discursiva, que pone al servicio del razonamiento, el uso de definiciones, propiedades y teoremas matemático-ingenieriles.

Para el análisis correspondiente a las clases en observación se realizó una división en momentos y cada uno de ellos se relaciona con las dimensiones epistemológicas y cognitivas del ETM extendido explicadas con anterioridad. Los momentos son: (1) presentación de un problema y entendimiento del problema a resolver; (2) consideraciones desde el contexto extramatemático presentado, con la finalidad de estructurar y realizar simplificaciones de la situación; (3) identificación de la presencia de un modelo ingenieril asociado a la situación; y (4) presentación de los resultados obtenidos y el análisis de los mismos con la finalidad de corroborar los procesos que se han llevado a cabo y validarlos (Montoya-Delgadillo y Cosmes- Aragón, 2021, pp. 162-163).

En este sentido, un acercamiento a las situaciones académicas que consideren una conexión entre matemáticas e ingeniería es posible desde lo que hemos señalado, pues vincular modelación con ETM posibilita dichas conexiones. En Cosmes-Aragón y Montoya-Delgadillo (2021) se evidencia la posibilidad de conectar matemáticas e ingeniería vía situaciones académicas de modelización. En su reporte declaran que objetos matemáticos asociados a modelos matemáticos, permiten tal conexión. Así, identifican objetos matemáticos-ingenieriles asociados a la formación profesional en estructuras, tales como: objetos del cálculo asociadas a la función, la derivada y la integral para el cálculo de estructuras estáticamente determinadas (isostáticas).

Perspectiva 2

Desde la Socioepistemología (TS) se tienen diversas líneas de investigación a través de las cuales se estudia la construcción social del conocimiento matemático por medio de los usos y la funcionalidad que tiene la matemática, en distintos niveles de contextualización donde la matemática adquiere significado (Cantoral, 2016).

Es particularmente en los escenarios históricos donde se ha encontrado un amplio abanico de posibilidades, desde investigaciones de corte puramente histórico, de corte histórico-didáctico, o bien de corte histórico-epistemológico. Como mencionan Arcos et al. (2022), la importancia y prevalencia de este tipo de estudios, más allá de presentar la historia como algo anecdótico o motivacional, radica en la potencialidad del uso de la historia como un escenario contextual que desarrolle la construcción de conocimiento matemático de manera más robusta, no buscando generar anacronismos, sino más bien enfocándose en y criticando la aparente atemporalidad que tiene el conocimiento matemático, evidenciando la evolución, adaptaciones y transformaciones que este sufre a lo largo de las distintas épocas, sociedades y culturas.

Es en el paradigma de los estudios de corte histórico-epistemológico, de donde es posible rescatar elementos y significados de la matemática, los cuales pudieron haber sido opacados en favor de otros más acordes a las necesidades de la sociedad de dicha época, pero que al ser recontextualizados podrían favorecer a la construcción de conocimiento matemático más robusto o a la resignificación de un conocimiento matemático específico.

Bajo este paradigma se desarrolló la investigación de Hinojos (2020), donde se tomó el contexto de la formación de profesionales de la ingeniería en el área de Ingeniería Eléctrica, en la asignatura de Electrónica de Potencia, para problematizar una matemática en la práctica cercana al quehacer profesional: el estudio de fenómenos eléctricos en estado estacionario y su relación con la teoría de Fourier.

Si bien, la inquietud inicial de dicha investigación se enfoca en ¿por qué es la serie trigonométrica de Fourier un contenido matemático que deben estudiar y utilizar quienes se dedican de manera profesional a la ingeniería eléctrica?, esta se modificó a raíz del análisis de las obras originales de científicos del siglo XIX hacia ¿qué relación existe entre la propagación del calor y la transmisión de la electricidad?, lo cual llevó a encontrar similitudes entre las diversas características y propiedades físicas de ambos fenómenos y que el modelo matemático que los representa es, técnicamente, el mismo. En esta sección se describe de manera breve lo principal del enfoque utilizado para realizar dicho estudio, y los diversos resultados y ampliaciones que ha tenido la línea del investigador a raíz de su continuidad.

En primer lugar, la problematización parte de analizar al conocimiento matemático puesto en uso (saber desde la TS), en un escenario contextual y temporalmente situado. Este saber se descompone en cuatro dimensiones entrelazadas entre sí, pero que por motivos metodológicos se separan de manera intencional (Hinojos, 2020), de dicha separación se focaliza entonces en la dimensión epistemológica, de la cual se estudian otros aspectos (figura 1).

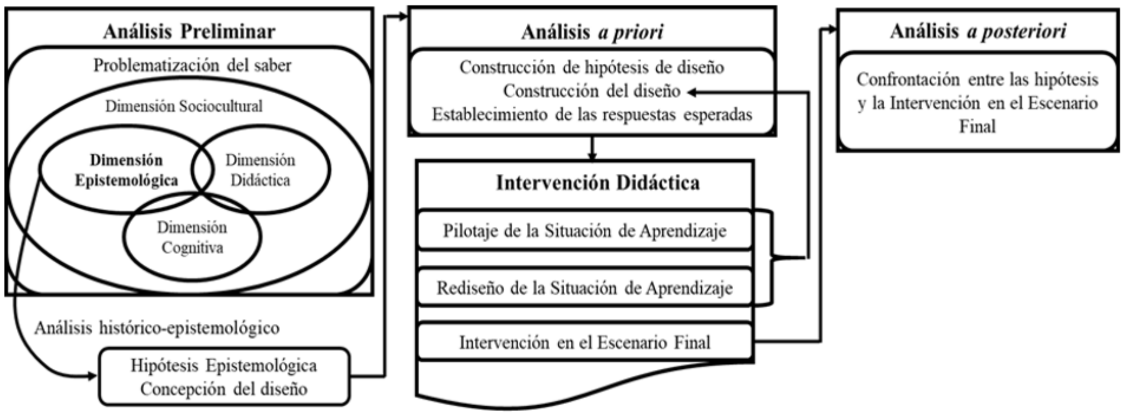


Figura 1. Modelo de la Ingeniería Didáctica (Hinojos, 2020, p. 31).

Es en esta focalización en la dimensión epistemológica que cobra sentido hablar de un análisis histórico-epistemológico del saber, para lo cual se caracterizan tres niveles de contextualización (cultural, situacional y de significación) a través de las diversas metodologías desarrolladas para este fin, y de las cuales se desprenden las hipótesis epistemológicas que guían la construcción de los diseños para intervención didáctica (Hinojos et al., 2020)

La intervención didáctica es una metodología que permite incidir en aspectos del ambiente educativo, la cual puede darse en dos modalidades: como planificación y diseño de clase, y como evaluación y control del proceso de aprendizaje; ambas modalidades pueden diseñarse de manera individual o simultánea (Varela, 2016).

La modalidad simultánea contempla el llenado de una tabla de apoyo donde se especifican aspectos de la planeación, el diseño, la ejecución y la evaluación de un conocimiento a escolarizar (tabla 1). Pero en el presente capítulo, reportamos el momento de Diseño.

Tabla 1
Esquema de la intervención didáctica

Fases	**Pre-intervención**			**Intervención**	**Post-intervención**
Momento	**Planeación**		**Diseño**	**Ejecución**	**Evaluación**
	Objetivos	*Contenidos*	*Actividades o instrumentos*	*Métodos*	*Evaluación*
Preguntas	¿Qué se va a aprender?	¿Cuándo se va a aprender?	¿Cómo se va a aprender?	¿Cómo realizar la intervención didáctica?	¿Cómo evidenciar el aprendizaje?

Fuente: construido con base en (López-Moya, 2004).

El diseño de actividades o instrumentos para desarrollar el aprendizaje de un conocimiento es un proceso de construcción y refinamiento continuo que requiere de metodologías concretas, un ejemplo de este tipo de metodología es el presentado por Hinojos et al. (2020) donde los autores exponen los principios de diseño de tareas en socioepistemología, se menciona que la problematización del saber provee del marco de dominio específico que en conjunto con la Ingeniería Didáctica permiten establecer las hipótesis epistemológicas que orientan la construcción de instrumentos de intervención con base en la investigación.

La problematización desde la dimensión epistemológica a través de una metodología de análisis histórico-epistemológico considera tres elementos: (1) lo situacional donde se identifican las condiciones sociales, culturales, laborales y temporales del autor y su obra; (2) el conocimiento matemático y su significado, donde se reconstruye la obra utilizando herramientas contemporáneas, se identifican los principales resultados y su relación con el estado actual del conocimiento; y (3) los invariantes en el uso del conocimiento matemático, que refiere a reconocer las nociones que permiten la construcción de conocimiento (Arcos et al., 2022; Hinojos et al., 2023).

Fue a través de estos elementos que se determinó una hipótesis que orientó al diseño de las tareas que conforman el instrumento intervención "la noción de estado estacionario puede resignificarse mediante el uso de analogías entre calor y electricidad dada la racionalidad contextualizada de las obras de científicos del siglo XIX", que se cristalizó en una secuencia de cuatro tareas (Hinojos y Farfán, 2019):

- Tarea 1. Con base en la obra de Thomson se trabaja con la analogía material en un paradigma estático.
- Tarea 2. Con base en la obra de Ohm se trabaja con la analogía semiformal en un paradigma dinámico.
- Tarea 3. Con base en la obra de Maxwell se trabaja con la analogía formal en un paradigma dinámico.
- Tarea 4. Problemas de circuitos eléctricos en estado estacionario en un paradigma dinámico.

Posteriormente, con base en los resultados de la implementación de la intervención didáctica con estudiantes de ingeniería eléctrica de una universidad mexicana, se identificó que el estado estacionario se caracteriza epistemológicamente como: una noción matemática relativa a funciones de primer o segundo orden, que se expresa mediante modelos matemáticos algebraicos y argumentos gráficos, que adquiere significados más robustos al contextualizarse en problemas de la física y la ingeniería. Este estado además se relaciona con un comportamiento que tiende una magnitud constante o con oscilaciones periódicas y acotadas después de un estado transitorio donde la magnitud cambia rápidamente durante un intervalo corto.

El principal resultado de esto, además del aporte de la problematización de un saber matemático dentro de la ingeniería, es la configuración del método de siete pasos para el análisis histórico-epistemológico, el cual ha sido utilizado en investigaciones posteriores, como Hinojos et al. (2023), donde se analizó la construcción de la integral para la determinación de la longitud de arco en las obras de Fermat y van Heuraet, que en conjunto con la metodología de la intervención didáctica permitió su aplicación en clase regular de Cálculo Integral para estudiantes de ingeniería.

Perspectiva 3

Una estrategia para identificar la matemática de interés en una asignatura profesional es: 1) entrevistar a profesores y estudiantes de asignaturas profesionales, y 2) consultar los planes y programas de estudio. De las entrevistas se tiene un punto de partida y de contraste para ubicar el contenido matemático de sus usuarios. Mientras que de la revisión de los planes y programas se realiza un rastreo minucioso del contenido matemático de interés, primero se identifica del temario la terminología relacionada y posteriormente en los libros de bibliografía (básica y de consulta) se profundiza.

Si bien se considera que la matemática tiene una nomenclatura universal, la contextualización en los problemas de la ingeniería condiciona el simbolismo y la terminología. Una estrategia es primero buscar el contenido matemático de interés que es familiar: expresiones algebraicas, tablas de datos, gráficas, diagramas y expresiones numéricas. Posteriormente se recurre a entender el contenido disciplinar por inmersión propia y con el apoyo de profesores de las asignaturas profesionales. Finalmente se estudia el contenido matemático de interés en y desde el contenido disciplinar, pudiéndose hacer con un análisis documental y con un análisis en su contexto natural de producción.

Una estrategia para problematizar teórica y metodológicamente la relación entre matemática y la ingeniería proviene de la Teoría Socioepistemológica y el método etnográfico. Ambos comparten como objetivo entender el quehacer de un grupo humano desde lo situacional. La Teoría Socioepistemológica atiende el conocimiento matemático con herramientas analíticas específicas al interés de investigación y el método etnográfico atiende cualquier aspecto cultural a través de un control sistematizado de realizar investigación social (Torres-Corrales et al., 2020).

En esta dirección, Torres-Corrales (2020) realiza una investigación con estudiantes de Ingeniería Mecatrónica en la asignatura de Robótica Industrial de una universidad mexicana, cuyo interés fue el estudio de los usos y significados de la trigonometría en el problema cinemático directo de robots seriales que se resuelve con el algoritmo de Denavit-Hartenberg.

De la Teoría Socioepistemológica se tiene el estudio de la contextualización del contenido matemático y disciplinar a partir de tres niveles: (1) el contexto cultural, de donde se reconoce la identidad y el quehacer de un grupo humano; (2) el contexto situacional, de donde se identifican las condiciones donde se lleva a cabo la actividad matemática, por ejemplo, lugar, tiempos, participantes, dentro o fuera de la escuela; y (3) contexto de significación, situado en los contextos cultural y situacional, la interpretación de los significados de la matemática que son intrínsecos sin importar el problema, simbolismo y grupo humano que utilice dicho conocimiento (Torres-Corrales y Montiel, 2020).

Del método etnográfico se abordan dos acercamientos: recolección y producción de datos. La recolección de datos se hace con la revisión de documentos (manuales, libros, artículos especializados) y la producción de datos se hace con un trabajo de campo. Para cada acercamiento se emplean técnicas etnográficas: observación no participante para la recolección de datos y observación participante y conversación (entrevistas colectivas e individuales) para la producción de datos. La observación no participante refiere cuando el investigador no influye en los datos, mientras que la observación participante se tiene influencia por el hecho de estar con el grupo humano, aún con un grado de implicación pasivo (mirar y escuchar) porque al ser ajeno al grupo los miembros pueden modificar su comportamiento habitual. Con la recolección de datos se interpreta lo que dicen que hacen a partir de documentos, mientras que desde la producción de datos se interpreta lo que hacen y dicen desde el contexto donde se gestan los datos mediante escuchar y dialogar con los miembros del grupo (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2022).

La articulación entre la Teoría Socioepistemológica y el método etnográfico responde a la complejidad del objeto de estudio de la matemática para la formación de ingenieros. La manera particular de problematizar la relación entre matemática y la ingeniería brinda rigor a la investigación tanto en control del registro de datos, el análisis con diversas fuentes de información y la triangulación de resultados (Torres-Corrales et al., 2020).

La forma descrita de hacer investigación genera una amplia cantidad de datos que resulta compleja de organizar, analizar y comunicar. Se trata de una investigación con distintas fases, en la cual se requiere hacer de manera particular revisiones de literatura, estructuras metodológicas y plantear preguntas auxiliares de investigación con la finalidad de atender una pieza de interés que importa para entender el objeto de estudio en su totalidad.

Reflexiones finales

Las tres perspectivas mostradas evidencian estrategias teórico-metodológicas para problematizar la formación de ingenieros en asignaturas profesionales desde la Matemática Educativa. La perspectiva 1 trató la formación de estudiantes de Ingeniería Civil en la asignatura de Análisis Estructural a través de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM), extendido a la ingeniería y la modelización. La perspectiva 2 abordó la formación de estudiantes de Ingeniería Eléctrica en la asignatura de Electrónica de Potencia y en el contexto de una intervención didáctica construida con base en el análisis histórico-epistemológico de la Teoría Socioepistemológica. La perspectiva 3 atendió la formación de estudiantes de Ingeniería Mecatrónica en la asignatura de Robótica Industrial, mediante un análisis cualitativo de la actividad matemática desde la Teoría Socioepistemológica y el método etnográfico.

Estas comparten que la problematización de la formación de ingenieros en asignaturas profesionales conlleva el reto de entender tanto el conocimiento matemático como el disciplinar involucrados en el problema, teniendo en consideración que ambos son indistinguibles entre sí dada su articulación. Para ello se recurre a la literatura especializada (revistas de ingeniería y manuales disciplinares), obras antiguas de donde surge una pieza de conocimiento matemático, las explicaciones del profesor y las producciones del trabajo del estudiante de ingeniería.

Si bien estas perspectivas hacen un análisis cualitativo que permite la comprensión a profundidad de la problemática de la formación de ingenieros que trató cada problema de investigación particular, se limitan a estudios de caso que van de grupos de 6 a 30 participantes. Por ello, para dar explicaciones generalizadas del fenómeno educativo se plantea como prospectiva de investigación realizar análisis cuantitativos que permitan generar estudios con muestras de mayor cantidad de participantes.

A partir de los resultados de corte teórico-metodológico mostrados, se identifica que la formación matemática de ingenieros en el ámbito escolar es una línea de investigación que debe robustecerse a través del estudio del quehacer de la ingeniería en situaciones no escolares, el estudio del contexto del lugar de trabajo como la industria y el desarrollo tecnológico, entender cómo la matemática en esos contextos puede ser traspuesta o adaptada para la escuela y la formación docente del profesor de matemáticas para ingeniería.

Por último, concluimos que el trabajo de investigación no debe mantenerse aislado de la realidad escolar, sino que debe existir un diálogo permanente entre investigadores, docentes e ingenieros en servicio para realizar los ajustes necesarios al currículum y que este impacte en la formación de los futuros profesionales de la ingeniería.

Referencias

Arcos, I., Hinojos, J., Montiel, G., Rodríguez, F., y Zubillaga, E. (2022). La investigación histórica: enfoques para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en México. En Gutiérrez, R. E., y Prieto, J. L. (Comps.). (2022). *Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática*. Asociación Aprender en Red. https://acortar.link/0IGCJO

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 38* (2), 86-95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Borromeo-Ferri, R. (2010). On the Influence of the Mathematical Thinking Styles on Learners´ Modeling Behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 99-118. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Segunda Edición. Gedisa.

Cosmes-Aragón, S.E. y Montoya-Delgadillo, E. (2021). Understanding links between mathematics and engineering through mathematical modelling- The case of training civil engineers in a course of structural analysis. In: Leung F.K.S., Stillman G.A., Kaiser G. & Wong K.L. (Eds.), *Mathematical Modelling in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. (pp. 527-538). Editorial Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_44

Hinojos, J. (2020). *Una caracterización de las concepciones de estudiantes de Ingeniería Eléctrica acerca de la noción matemática del estado estacionario*. Tesis de doctorado. Cinvestav, México. https://www.doi.org/10.13140/RG.2.2.13579.03369

Hinojos, J. y Farfán, R. (2019). Historical-epistemological elements for the design of a learning situation from Socio-epistemology. The case of steady-state and electrical engineering. *Journal of Teaching and Educational Research 5*(5), 20-31. https://doi.org/10.35429/JTER.2019.15.5.20.31

Hinojos, J., Romero, F., y Farfán, R. (2020). Principios de diseño de tareas en socioepistemología. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 11, e708. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v11i0.708

Hinojos, J., Torres-Corrales, D., y Camacho-Ríos, A. (2023). The construction of the integral for the arc length of a curve based on van Heuraet and Fermat's works. *British Journal for the History of Mathematics*, *38*(1), 41-54. https://doi.org/10.1080/26375451.2023.2168880

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas [Mathematical Work Spaces. Points of view and perspectives]. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, 29-39. https://relime.org/index.php/relime/article/view/184

López-Moya, M. (2004). La intervención didáctica. Los recursos en Educación Física. *Enseñanza*, 22: 263-282. http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:20293/intervencion_didactica.pdf

Montoya-Delgadillo, E. y Cosmes-Aragón, S.E. (2021). La modelización matemática como promotor de conocimiento matemático. Una mirada desde los Espacios de Trabajo Matemático. En Carolina G., Astrid M., y Elizabeth R. (Eds.) *Modelación matemática: Aportes a la práctica docente desde la Didáctica de la Matemática*. (pp. 143-179). España:

Editorial Grao. https://www.grao.mx/libros/aportes-desde-la-didactica-de-la-matematica-modelacion-matematica-42279

Moutet, L. (2016). *Diagrammes et théorie de la relativité restreinte: Une ingénierie didactique* [Diagrams and theory of special relativity: A didactic engineering]. Tesis de doctorado. Université Paris 7, Francais. https://hal.science/tel-01611332/document

Pepin, B., Biehler, R. y Gueudet, G. (2021). Mathematics in Engineering Education: a Review of the Recent Literature with a View towards Innovative Practices. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 7, 63–188. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s40753-021-00139-8

Torres Corrales, D. e Hinojos, J. (En prensa). Estado de la literatura de la formación matemática de ingenieros desde la Matemática Educativa. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 25. https://redie.uabc.mx/public/enprensa/4804.pdf

Torres-Corrales, D. (2020). *Usos y significados de nociones trigonométricas en el problema cinemático directo de la Robótica*. Tesis de doctorado. Cinvestav, México. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34180.27524

Torres-Corrales, D. y Montiel, G. (2020). La desarticulación matemática en Ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la Matemática Educativa. *Nóesis. Revista De Ciencias Sociales*, *29*(58-1), 24–55. https://doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Torres-Corrales, D. y Montiel-Espinosa, G. (2022). Características matemáticas y contextuales de la Trigonometría en el repaso para Robótica en Ingeniería Mecatrónica. *Revista Innovación Educativa*, 22(90), 82-103. https://www.ipn.mx/assets/files/innovacion/docs/Innovacion-Educativa-90/Caracteristicas-matematicas-y-contextuales.pdf

Torres-Corrales, D., López-Acosta, L. y Montiel, G. (2020). Experiencias formativas de investigadores en el desarrollo de proyectos doctorales de Matemática Educativa. En B.I. Sánchez Luján y R. Hinojosa Luján (coords.). *Trazas de la investigación educativa en la experiencia de sus Quijotes. Reflexiones y aportes* (pp. 103-119). Chihuahua, México: Red de Investigadores Educativos Chihuahua. https://rediech.org/omp/index.php/editorial/catalog/book/14

Varela, C. (2016). Intervención didáctica con enfoque por competencias en materia del área humanista. En R. J. Ibarra, E. C. Bueno, R. Ibarra y J. L. Hernández (Eds.), *Trascender el neoliberalismo y salvar a la humanidad* (pp. 1527-1539). Signo Imagen. https://bit.ly/3rVQ3Xs

Capítulo 4. Modelización antropológica de un desarrollo tecnológico

Chapter 4. Anthropological modeling of a technological development

Alberto Camacho-Ríos*

Andrés Hernández Quintana

Leonardo Nevárez Chávez

Tecnológico Nacional de México, campus Chihuahua II

*alberto.cr@chihuahua2.tecnm.mx

Introducción

Con el interés de integrar las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en la enseñanza de las matemáticas, nos proponemos analizar una aplicación informática que emplean estudiantes de ingeniería en su dispositivo móvil para obtener desarrollos en serie de Fourier de funciones del cálculo diferencial, útil en los cursos de ecuaciones diferenciales que se enseñan en el Tecnológico Nacional de México (TecNM).

El desarrollo de la aplicación se inició a mediados del año 2018 y fue concluida a finales del 2020, por un estudiante del programa de Maestría en Sistemas Computacionales del Campus Chihuahua II. Dicho programa se nutre de proyectos de investigación que derivan de dos Cuerpos Académicos. Uno de estos es el de Educación Matemática y Computación, que actualmente se encuentra en el nivel de En Consolidación,[2] el cual consiente las líneas de investigación: 1) Didáctica de la Matemática y 2) Tecnologías Aplicadas a la Educación.

Los proyectos son orientados en atender con ese tipo de creaciones problemas de enseñanza específicos de la matemática escolar. A la fecha se cuenta con desarrollos relacionados con algunos temas, principalmente, de Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales. Los problemas que se presentan en la definición de ese tipo de proyectos es fincarles un marco teórico adecuado, debido a la coyuntura de involucrar dos disciplinas complementarias: la Matemática y la Infor-

2 Reconocido por el Programa para el Desarrollo Profesional Docente, PRODEP-SEP.

mática. Este es un problema nuevo que destaca de la enseñanza de la matemática como ciencia, debido a ese interés por las TIC, y hace necesario nuevas componentes de análisis, razón por la cual existe poca literatura al respecto.

Las referencias de Balacheff (1994) y Acosta, (2007), que se discuten más adelante, son prácticamente las únicas y, si bien orientan la investigación en el intento de relacionar estas disciplinas a través de Teoría de la Transposición Didáctica, la primera, y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la segunda, sus escritos no tuvieron el alcance esperado, de suerte que emprendieran mejorar la estructura de investigación que los autores proponen.

No obstante, creemos que el concepto de Organización Matemática (OM) definido por Chevallard (1999), en el marco de la TAD, es una estructura que ayuda al profesor a organizar los argumentos fundamentales: tareas, técnicas y tecnologías, necesarias para el ejercicio de la resolución de actividades escolares de la matemática, y permite unir dichos argumentos con aquellos de la informática que, naturalmente, surgen durante la creación de desarrollos tecnológicos. Ante esto, no es posible vigilar el uso de herramientas computacionales en el salón de clases, viéndolas simplemente como instrumentos didácticos, sin analizar los alcances de su uso durante la elaboración de organizaciones matemáticas (Acosta, 2007, p. 87).

De esta manera, nuestro objetivo se centra en construir una Organización Matemática OM_1, que involucre los conocimientos de las series de Fourier en las tareas, técnicas y teoremas, partiendo de una experiencia de enseñanza. Así como, estudiar la interacción de las tareas, técnicas y objetos de esa OM_1 con las tareas, técnicas y objetos de una OM_2 que modelice la resolución de ejercicios de series de Fourier en la aplicación informática mencionada, así como presentar las dificultades encontradas en la construcción de ambas organizaciones.

Las actividades citadas determinan una “modelización” del diseño de la aplicación informática. Desde la TAD, la modelización se fundamenta en asumir que la actividad matemática “se puede describir a través de ciertas herramientas de la TAD” y, en consecuencia, se propone un modelo general de las actividades formuladas en términos de OM.

En la dirección de la modelización, y su adopción en las actividades del aula, en el estudio de Barquero et. al (2007), las OM se miran como instrumento de articulación de las matemáticas en la matematización de problemas de la física-matemática, en los ciclos universitarios de ciencias. Los autores confrontaron la poca visibilidad de las técnicas durante la matematización de ciertos tipos de problemas. Otros, como Bronner y Larguier (2007), utilizaron OM en el bachillerato para dar continuidad a los aprendizajes entre diferentes ámbitos como lo numérico, algebraico y funcional.

De lado de los desarrollos tecnológicos estudiados desde la perspectiva de la TAD, Acosta (2007) analizó el uso de ostensivos computarizados a través de dibujos dinámicos manipulados en pantalla, del software Cabri, en una institución académica de formación de profesores en Colombia. También, en Moreno et. al (2022) se analizó el desarrollo de una aplicación informática que convierte funciones utilizando el teorema de la transformada de Laplace. La aplicación se distingue de otras debido a que las técnicas matemáticas que se emplean son semejantes a las utilizadas por los estudiantes en su cuaderno de trabajo. Otras aplicaciones de este tipo fueron realizadas por Duarte (2020), para el desarrollo de funciones en series de Fourier, que se analiza en este documento, y García (2020), para la resolución de ecuaciones diferenciales.

Ostensivos y no ostensivos

El objetivo de la TAD se centra en las dimensiones sociales de los fenómenos didácticos, interesándose en liberar el estudio de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los estatutos rigurosos a los que les tiene sometidos la institución escolar. Para ello, da importancia a la transformación de los "objetos" de la matemática en actividades prácticas que ayudan en la resolución de problemas de la matemática escolar.

La herramienta que mueve esas actividades es el concepto de "ostensivo", eje transversal de la TAD, y del presente artículo, que se concibe como un instrumento posible de la actividad humana. Boch y Chevallard (1999) asumen que los ostensivos "constituyen la materia prima de las tareas, técnicas y objetos, de las distintas organizaciones de que se compone el conocimiento matemático"; motivaremos esto último con el siguiente ejemplo:

En un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias que se lleva en el nivel de ingeniería, se pide a estudiantes determinar la solución homogénea asociada a la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' + 3y' + 2y = e^{x}$$

Una dinámica sencilla para la resolución consiste en organizar una "ecuación característica asociada" a la ecuación diferencial homogénea, $y'' + 3y' + 2y = 0$, en la forma:

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

Esta última despoja a la ecuación original de sus derivadas y la convierte en una expresión aritmética fácil de manipular y resolver, toda vez que guarda la forma general de una ecuación cuadrática aritmética y es semejante a la ecuación diferencial, no obstante, se factoriza como:

$$(m + 2)(m + 1) = 0$$

Siendo las "raíces" que la resuelven: $m=-2$ y $m=-1$. De aquí se obtienen las soluciones parciales de la ecuación diferencial homogénea de la siguiente manera:

$$y_1 = c_1e^{-2x}, y_2 = c_2e^{-x}$$

Detrás de esa manipulación se encuentra otra dinámica que hace suponer una función solución para la ecuación diferencial en la forma $y=e^{mx}$, que en lo sucesivo llamaremos "objeto", la cual permite con sus derivadas: $y'=me^{mx}$, $y''=m^2\ e^{mx}$, el establecimiento de la ecuación característica asociada, $m^2+3m+2=0$ y su solución en la forma expuesta.

En la primera dinámica la ecuación diferencial se transforma en una ecuación aritmética alejada de la suposición $y=e^{mx}$ que la justifica, es decir, esta última deja de ser importante en la resolución y se manipulan "ostensivos" con los que se trata de justificar la resolución de la ecuación diferencial. Si bien los ostensivos, involucrados en la ecuación aritmética, se alejan de la suposición que justifica la solución, estos son necesarios para resolver la ecuación diferencial.

En la segunda dinámica, de la función $y=e^{mx}$ se "desprende" una forma de "hacer algo", una técnica, que de ella se engendra, de naturaleza semejante al objeto. La técnica permite a los estudiantes, de manera inconsciente, "manipular" o trabajar la función solución propuesta, aun cuando ausente en la primera dinámica. No obstante, ese "hacer algo" no es en sí mismo el objeto sino ostensivos que ponen en juego otros objetos (Bosch y Chevallard, 1999). De aquí que la técnica resulta de la manipulación de ostensivos.

Los ostensivos son, luego, objetos en forma de palabras y notaciones, accesibles a los sentidos, que surgen intencionalmente de los estudiantes al confrontar actividades de la matemática escolar. Esos objetos son demandados a sus "prácticas sociales" ante la necesidad de resolver una tarea o actividad, en este caso la ecuación diferencial homogénea asociada.

No obstante, existe una correlación implícita, un tanto escondida, en el ir y venir entre los ostensivos y el objeto, que garantiza la resolución de la ecuación diferencial. En ese caso el objeto $y=e^{mx}$, "justifica" la actividad de la técnica utilizada: $m^2+3m+2=0$, asumiéndose "tecnología" (es decir, se encuentra en un nivel teórico por encima de la técnica que engendra, la cual inicialmente aceptamos como actividad práctica) o bien, con el adjetivo que le confiere Chevallard, un "no ostensivo".

La función $y=e^{mx}$, que pone en actividad los ostensivos, corresponde a un tipo de objetos tecnológicos no ostensivos. Los no ostensivos son aquellos objetos de la matemática: teoremas, definiciones, axiomas, conceptos, etc. De esta forma, la ambivalencia, es decir, el ir y venir entre ostensivos y no ostensivos específicos, "describe" la actividad que lleva a la resolución de tareas de la matemática escolar, en un esquema que involucra tecnologías, técnicas y tareas, pero ¿Qué importancia tiene ese tipo de descripción en la enseñanza de la matemática?

Según Bosch y Chevallard (1999) la "naturaleza del objeto" se refiere al problema de describir actividades prácticas en las que el objeto mismo esté de por medio. Durante la resolución de la ecuación diferencial, ya no nos preguntamos por el objeto-función $y=e^{mx}$ sino por los ostensivos que determinan ciertos tipos de tareas y técnicas que los componen y por los elementos "tecnológicos" y teóricos que describen y justifican esas actividades. Esto que Chevallard (1997) concibe como una Praxeología u OM la cual modeliza la actividad humana, y tratamos de explicar en el siguiente apartado.

Por su lado, el uso de TIC en la enseñanza de la matemática es por hoy una inquietud creciente en las instituciones del nivel superior, de las que se espera que su utilidad ayude a mejorar el aprendizaje. Sin embargo, los usuarios no han tomado en consideración que ese tipo de herramientas han sido creadas, salvo ciertas excepciones, desde un punto de vista mercantil, no didáctico. Esta afectación hace que los resultados que se esperan durante la resolución de ejercicios no sean los esperados en cuanto a su comparación con aquellos que obtienen los estudiantes en su cuaderno de trabajo. De esta manera, cuando se crea un desarrollo informático que resuelve ejercicios de la matemática, se esperaría que los resultados que devuelva sean lo más parecido a los que se obtienen en el aula, o bien los que consigue el estudiante durante su manipulación. Sin embargo, en diferentes aplicaciones esto último no ocurre.

Por ejemplo, es común que al solicitar a la versión en línea de WolframAlpha[3] la resolución de una ecuación diferencial como: $y''+y=tan(x)$, devuelva resultados que no coinciden, o se alejan demasiado, con los obtenidos en el aula. La ecuación comúnmente se resuelve por el método sugerido en el programa de estudios, conocido como de “variación de parámetros”, con el que se llega a la siguiente solución:

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\text{sen}(x) - \cos(x) \cdot \ln(\text{sen}(x) + \tan(x))$$

El método implica técnicas y ostensivos que involucran la regla de Cramer, la resolución de determinantes y procesos de integración, eventualmente incómodos, para llegar a la solución.

Sin embargo, la solución que devuelve el software difiere considerablemente de esta última, es decir, (ver figura 1):

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\text{sen}(x) + \cos(x) \cdot \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \cos(x) \cdot \ln\left(cos\left(\frac{x}{2}\right) + sen\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Las diferencias entre ambos resultados son considerables y establecen algunos conflictos, didácticos y técnicos, con el uso de la aplicación. Uno de estos es la confusión que crean en los estudiantes que ejercitan por primera vez el método de variación de parámetros y otro tiene que ver con las técnicas matemáticas utilizadas para la creación del desarrollo, las cuales, evidentemente, no corresponden a las utilizadas en el aula.

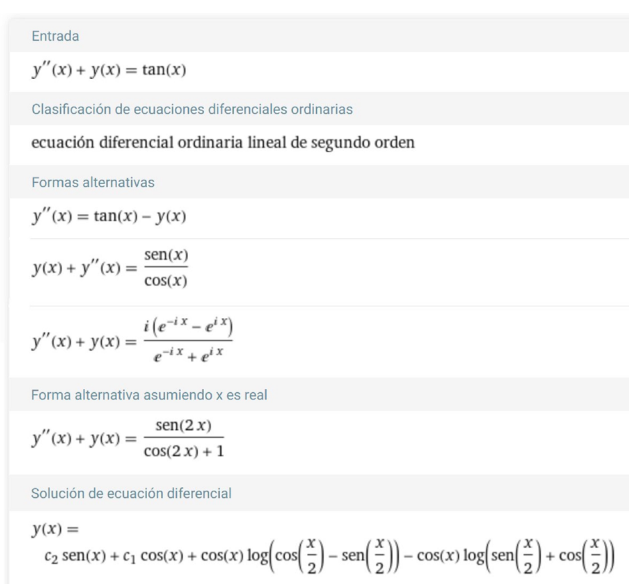


Figura 1. Solución de la ecuación diferencial en WolframAlpha.

[3] Véase: https://www.wolframalpha.com/

De modo es que una condición que se debe imponer al desarrollo de aplicaciones informáticas para ser usadas durante la resolución de problemas en el aula es que los resultados que devuelva su interfaz sean desarrollados a través de técnicas desprendidas de teoremas o definiciones, tal como sucede en el salón de clases.

Teoría Antropológica de lo Didáctico

En la TAD, Chevallard (2007) define las *Praxeologías* partiendo de ostensivos cercanos a las interacciones cotidianas de los profesores y estudiantes, a través de los tipos de tareas *T,* técnicas τ, y tecnologías θ. Toda ciencia de la matemática es una praxeología, puesto que corresponde a un discurso teórico como suelen ser definiciones, teoremas, axiomas, entre otros conceptos, como las demostraciones. Las praxeologías se describen en una unidad de análisis que contiene la tétrada $[T, \tau, \theta, \Theta]$. En esta última, el símbolo Θ se concibe como un segundo nivel racional, llamado teoría, que da legitimidad a la unidad. La unidad se compone de dos niveles: la *praxis,* constituida por la actividad *T* y la técnica τ que lleva a su resolución, así como un *logos* o conocimiento reconocido por las tecnologías θ y Θ que describen y explican las técnicas.

Las praxeologías modelizan la actividad matemática desarrollada en el aula y, de manera más general, las "prácticas sociales" que determinan las actividades propuestas en la matemática escolar (Boch y Chevallard, 1999). La praxis y el logos establecen una "organización praxeológica", o bien "organización matemática" OM. Las OM son relativas a la institución de referencia, es decir, los elementos que contiene no tienen por qué serlo en otra institución que se dedica a lo mismo: enseñar matemáticas.

Por ejemplo, OM es la organización en la cual se establece el tipo de tarea *T* en la resolución de la ecuación diferencial homogénea asociada, vista en el apartado anterior, que se enseña en el TecNM: $y''+3y'+2y=0$. Esta se dispone en orden jerárquico, según la unidad de análisis, como: *T:* Resolver la ecuación diferencial: $y''+3y'+2y=0$; τ: Corresponde al ostensivo $m^2+3m+2=0$ y θ: Sea $y=e^{mx}$ una función diferenciable, propuesta solución de la ecuación diferencial, con m número real o complejo, cuyas derivadas: $y'=me^{mx}$, $y''=m^2 e^{mx}$, al ser sustituidas en la ecuación diferencial: $y''+3y'+2y=0$, conducen a la expresión: $e^{mx} (m^2+3m+2)=0$ y, puesto que $e^{mx}\neq 0$, luego $m^2+3m+2=0$. Θ: Definición: Una ecuación que contiene las derivadas de una o más funciones desconocidas (o variables independientes), se llama Ecuación Diferencial (Zill, 2018).

La TAD parte del supuesto que un individuo para realizar su potencial humano requiere de diferentes recursos sociales producidos históricamente fuera de él (Castela, 2009). Uno de estos recursos es el concepto de Institución, I_s. Toda institución se define como tal a partir de la estructura de orden que la determina, en la que existen actividades sociales desarrolladas por los sujetos, bajo ciertas restricciones institucionales, aprovechando los recursos disponibles en dicha institución. En ese sentido, la OM descrita anteriormente es una institución, puesto que es un objeto social, también lo es el libro de ecuaciones diferenciales de Zill, así como el concepto de función usado en el cálculo diferencial, puesto que guardan una estructura ordenada que los define y los determina como organizaciones.

Otro recurso importante es el de Práctica Social. Desde el punto de vista organizativo, en la TAD, esta última también se concibe institución, incluso, toda institución es constituida por prácticas sociales. En el sentido de Covián (2005) y desde la Socioepistemología (SE): "la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen". Ese "hacer", que nace de las actividades desarrolladas por los sujetos, son ostensivos guardados al interior del conocimiento, devenidos en diferentes etapas de los humanos, que los lleva a manipular las actividades que enfrentan. No obstante, en el sentido de su origen, los ostensivos corresponden a principios que "norman" a la práctica social, los cuales se encuentran en descentración de los no ostensivos matemáticos (Cantoral, 2013, Camacho, 2021). Para Boch y Chevallard (1999), "los ostensivos forman parte de la realidad empírica (las prácticas sociales) accesible a los sentidos".

No obstante, en la SE, y como afirma Cantoral (2013): las prácticas sociales "no son observables, pero si caracterizables". En el siguiente apartado abundamos en esta reflexión.

En lo que sigue hablaremos de las OM y prácticas sociales desde su posición como instituciones que sirven de recursos a los estudiantes para realizar y utilizar su potencial durante la resolución de problemas, sin pretender establecer la práctica social en sí misma.

Metodología

El tema de series de Fourier se enseña en el curso de ecuaciones diferenciales de las carreras de ingeniería del TecNM al final del período semestral, en un lapso de unas tres o cuatro semanas. El desarrollo trigonométrico de una función $f(t)$ periódica en un cierto período de $(-p,p)$ (es concentrado en la siguiente expresión, válida en ese intervalo:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{n\pi}{p}t) + b_n \mathrm{sen}(\frac{n\pi}{p}t))...(1)$$

La deducción de (1) se fundamenta en el conjunto de funciones ortogonales, *φ(t)*, que las contiene: $\{1, \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right), \mathrm{sen}(\frac{n\pi}{p}t)\}$ en $I:[-p,p]$ en ***I:[-p,p]***. Es a través del concepto de ortogonalidad entre funciones que se obtienen los coeficientes a_0, a_n y b_n, para una función *f(t)* dada, los cuales sustentan la expresión (1). Esta última cambia si las funciones *f(t)* que se desean desarrollar son pares o impares, la cual se reduce a la expresión (2) si la función es par, y a (3) si la función es impar:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{p}t)... (2)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{sen}(\frac{n\pi}{p}t)... (3)$$

En el primer caso los coeficientes se obtienen a través de resolver las siguientes integrales:

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt,\ a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos(\frac{n\pi}{p}t)dt,\ \text{siendo } b_n = 0$$

Para el segundo se reducen a:

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{p}t)dt,\ \text{siendo } a_0 = 0 \text{ y } a_n = 0$$

La asociación de las funciones $\cos(\frac{n\pi}{p}t)$ y $\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{p}t)$ con los desarrollos de la función *f(t)*, se encuentra en que la primera es par y la segunda impar.

La importancia de estos desarrollos permite resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales, de condiciones iniciales, que simulan sistemas dinámicos masa-resorte, como el que se muestra en (4), en la que *m* es la masa que cuelga del resorte y *k* la constante de este último: *mx´´(t)+kx(t)=f(t)*...(4), siendo la función *f(t)* periódica en un cierto intervalo. La resolución de la ecuación diferencial es dilatada, ya que precisa, de inicio, desarrollar la función *f(t)* en una serie de cosenos o senos, como las mostradas en (2) y (3), lo cual depende si esta última es par o impar, para luego sustituir el desarrollo en (4) y con ello pasar a su resolución.

Construcción de organizaciones

Organización matemática OM_1

En una de las actividades vistas al final del semestre enero-junio de 2023 en el TecNM, para resolver los tipos de ecuaciones diferenciales mencionados en el apartado anterior, se pidió a estudiantes obtener un desarrollo para la función $f(t)=1-t$, cuyo dominio se encuentra en el intervalo $0\leq t\leq 2$, de modo que, si se extiende a la parte negativa del eje *t* en forma periódica, esta sea impar.

El problema se presenta como una actividad *T,* de la siguiente manera:

T: Establecer la función $f(t)=1-t$ de manera que sea impar a partir del dominio dado $0\leq t\leq 2$.

Los ostensivos que se presumen en los textos (Zill, 2018, p. 437), en principio, hacen de lado las definiciones, θ , de paridad entre funciones que los justifican, es decir, los no ostensivos: θ_1: $f(t)=f(-t)$ entonces $f(t)$ es par. Y θ_2: $f(-t)=-f(t)$ entonces $f(t)$ es impar; ambas involucran en su lugar la representación gráfica de “simetría” para el establecimiento sugerido, lo cual parece adecuado debido a que permite representar en el cuaderno, de los estudiantes, el desarrollo periódico de la función en serie de Fourier.

El concepto de simetría es un ostensivo que se desprende de las definiciones de paridad enunciados en las tecnología θ_1 y θ_2 ; como tales, determinan técnicas gráficas τ que ayudan ha organizar dicha paridad, situándose en el ámbito de la geometría elemental, corresponden a los siguientes registros escritos y gráficos. τ_1: se afirma que una función $f(t)$ es par si su gráfica es simétrica respecto al eje *y,* o bien τ_2: Una función $f(t)$ es impar si su gráfica es simétrica respecto al origen, figura 2.

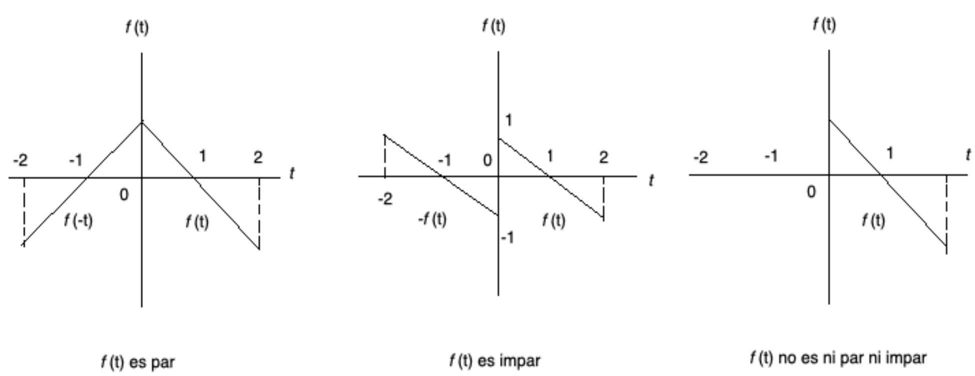


Figura 2. Gráfica de una función según su simetría respecto al eje y.

El trabajo que realizan los alumnos para verificar si la función es, para el ejemplo, impar, precisa de actividades que se reconocen como "subtareas *t*", (Chaachoua, et. al, 2019) las cuales se desprenden de la actividad *T* y se caracterizan de dos maneras. En un primer caso, se pide: t_1: reflejar la gráfica de la función $f(t)=1-t$, sobre el eje *y* de modo que cumpla con los requisitos de simetría respecto al origen.

Al reflejarla, los alumnos buscan que las coordenadas (0, 1) y (2, -1) de los vértices de la función inicial, se articulen como (0, -1) y (-2, 1). Logrando esto último, lo que resta es definir la expresión de la recta reflejada (segunda gráfica de la figura 2), actividad que corresponde a una segunda subtarea t_2. En esta dinámica, pocos estudiantes utilizaron la definición θ_2: $f(-t)=-f(t)$, para obtener la función así reflejada, o sea: t_2: $f(-t)=1—(-t)=-f(t)=-(1—(-t))=-1-t$.

No obstante, observe que la subtarea t_2, correlaciona los ostensivos gráficos utilizados en la subtarea t_1 con los no ostensivos declarados en la definición θ_2. Esta ambivalencia se verifica en la modelización, OM_1, y toma sentido pues privilegia la manipulación de θ_2 en beneficio de la resolución del problema, y a favor de los estudiantes quienes utilizaron la herramienta conceptual.

En otro caso, estudiantes prefirieron operaciones tipo ensayo y error para obtener la función, por ejemplo, durante la realización de las siguientes subtareas t_3: intercambiando signos en la gráfica de la función inicial: $1-t$, disponiéndola como $-1+t, 1+t$, etc., hasta atinar en la expresión, $-1-t$. O bien, t_4: determinaron la función buscada utilizando para ello las coordenadas, (2, 1) y (0, -1), de los extremos de la recta, y la ecuación *dos puntos*: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}(t-t_1)$, evitando así las tecnologías θ, por temor a equivocarse.

Esto hizo que los estudiantes consideraran los objetos no ostensivos θ, durante las subtareas t_3 y t_4, como no esenciales para la resolución de la actividad: "En este caso, hay que destacar que los elementos ostensivos bastan para resolver la tarea *T*, con un debilitamiento correlativo de los aspectos conceptuales, que se supone permiten comprender y controlar ese hacer" (Boch y Chevallard, 1999, p. 12).

Durante el desarrollo de estas últimas subtareas, las técnicas τ siguieron siendo reguladas y validadas por las tecnologías θ, que se infieren en la actividad, a pesar de estar ausentes.

Se puede afirmar que la teoría Θ que justifica la organización anterior, es el concepto de función visto como una regla de correspondencia entre dos conjuntos.

En resumen, las técnicas gráficas τ de simetría son suministradas por el texto usado en el curso de ecuaciones diferenciales y adoptadas por el profesor y estudiantes para resolver la actividad. No obstante, los ostensivos utilizados en las subtareas que se derivan de estas últimas, es decir:

t_1: Uso de la noción numérica de reflexión en las coordenadas.

t_2: Uso de la definición: $f(-t)=-f(t)$.

t_3: Intercambio de signos en las variables para establecer la función buscada.

t_4: Uso de la ecuación "dos puntos" para determinar la función.

Estas sugieren ser respuesta de prácticas sociales anidadas en los estudiantes, accionadas por la necesidad de resolver el problema.

Sin embargo, el ostensivo "simetría" en la gráfica de una función, del que se desprenden estos últimos, tiene por antecedente la noción de "reflexión", útil en la física, mencionado como "el cambio de dirección de una onda al entrar en contacto con una superficie que separa dos medios diferentes". Ambos ostensivos son principios fundamentales que norman una misma práctica social que los engendra, pero ¿cuál es esa práctica social? De esta última solo contamos con estos dos ostensivos que constituyen parte de su "función normativa", es decir, principios que ayudan a su "caracterización". Pareciera, pues, que para la TAD no interesa caracterizar la práctica social sino solamente identificar los ostensivos que la norman, al menos este aspecto es difuso en la literatura.

Con todo y lo anterior, el ostensivo es importante, puesto que lo ubicamos en al menos dos técnicas de trabajo de disciplinas diferentes, esto que Boch y Chevallard (1999) definen como *valencia instrumental*, es decir, el número de técnicas en las que el ostensivo puede intervenir.

La expresión escalonada $f(t)$ que resulta de las actividades desarrolladas en la tarea *T,* se describe como:

$$f(t)=\{-1-t,-2<t<0,1-t,0<t<2\}$$

El ejercicio continúa con el desarrollo de la función en serie de Fourier, utilizando las expresiones para el coeficiente: $b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{p}t\right)\,dt$ así como la relación (3), quedando:

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\big((-1^n)+1\big)\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2}t)}{\pi n}$$

Esta se sustituye en (4) para, en esas condiciones, resolver la ecuación diferencial, es decir:

$$mx''(t) + kx(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left((-1^{n}) + 1\right)\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2}t)}{\pi n}$$

Organización matemática OM_2

Como se vio en el apartado anterior, el problema básico que se presenta para resolver la ecuación diferencial (4) es, en principio, la habilitación de la función periódica $f(t)$ en serie de Fourier y, con más precisión, establecer esta última como par o impar según se pida en la tarea. Durante las actividades del aula, el establecimiento de $f(t)$ bajo esas condiciones, conduce a su desarrollo en serie de Fourier desde dos posibilidades. La primera es la manipulación algorítmica que hacen los estudiantes en su cuaderno de trabajo para la determinación de los coeficientes a_0, a_n y b_n según se sugiera la paridad, mientras, la segunda, es someter el desarrollo de la función en la aplicación informática conocida como "series de Fourier", creada por Duarte (2020).

En este apartado, pretendemos modelizar en una organización matemática OM_2, las actividades que se realizan con la aplicación citada, tratando de verificar las coincidencias y diferencias entre los elementos teóricos y prácticos de ambas organizaciones, OM_1 y OM_2, en tanto, llevan a la búsqueda de un mismo resultado. Para esto último, no obstante, se hace necesario situar ese tipo creaciones en un marco teórico alternativo concebido como Transposición Informática.

Transposición informática

Los efectos de la transposición didáctica son comunes en diferentes procesos en los que se involucra el conocimiento matemático, particularmente, durante la creación de tecnologías informáticas que ayudan en la resolución de problemas de la matemática escolar. Esos procesos, son acompañados de nuevos fenómenos didácticos inducidos durante la modelización informática de esas tecnologías. Tales fenómenos se deben principalmente a la transformación de los objetos de enseñanza al ser llevados a código de programación para su ejecución en la interfaz de las aplicaciones, y actúan con ciertas restricciones y limitaciones para los usuarios, como fue el caso analizado de WolframAlpha, visto líneas arriba.

Una modelización del conocimiento matemático involucrado en la creación de una aplicación hace necesarios procesos de Transposición Informática de elementos legitimados en el aula conducidos a la interfaz de la herramienta, a través de la definición de código de programación. Estos procesos deben entenderse como el trabajo sobre el conocimiento "que permite una representación simbólica y la implementación de esta representación por un dispositivo informático" (Balacheff, 1993).

Estos resultados ocurren cuando las praxeologías producidas en una institución educativa se trasladan a otra institución de naturaleza informática, siendo probable que tales procesos de cruce de dominios generen interacciones en forma de *efectos transpositivos*, debido a cambios en las condiciones y restricciones impuestas (Chevallard, 1999; Castela, 2009; Castela y Romo-Vazquez, 2022, Moreno, et. al, 2022). Para la modelización en una OM_2 que nos ocupa, los efectos transpositivos son de naturaleza informática, o bien "efectos transpositivos informáticos".

De lado de la TAD, asumimos la definición a la transposición informática según Acosta (2007):

> (...) se refiere al proceso por el cual la Organización Matemática de referencia (en nuestro caso OM_1) se transforma para posibilitar su modelización en un lenguaje de programación (OM_2). Ese proceso necesariamente impone restricciones que hacen que los objetos modelizados no correspondan completamente a la teoría de referencia".

La aplicación fue concluida a principios del año 2020 y utilizada en los cursos de ecuaciones diferenciales con el interés de desarrollar funciones en serie de Fourier. Originalmente, se experimentó con la resolución de ejercicios que se muestran en el libro de Zill (2018). Se instala fácilmente en el móvil y no requiere de internet para su uso, además, es gratuita y libre de publicidad. Para la implementación de la interfaz gráfica se utilizó un IDE de programación de aplicaciones móviles factible de utilizar en conjunto con Python, en este caso Android Studio: un ambiente de desarrollo integrado para aplicaciones en sistema operativo Android, incluyendo aquellos de la librería Chaquopy (Chaquopy Ltd., 2023), la cual permitió establecer la comunicación entre Android Studio y Python.

La interfaz, en el dispositivo móvil, cuenta con acceso para tres tipos de funciones, una función sencilla con dominio en $a \leq x \leq b$ y otras dos con entradas escalonadas de dos y tres funciones, cada una en su propio dominio, figura 3. En cada entrada solicita una cantidad en números enteros de "armónicos" que permiten verificar visualmente la convergencia de la función desarrollada. Para introducir las funciones , se considero la definición de operaciones básicas, principalmente de producto y elevación de potencias. Por ejemplo, si , los ostensivos informáticos se deben teclear, en *f(x)*, como 3_*x, $f(x)=3_*x$, indicando el asterisco la operación de multiplicar. Si la función fuera $f(x)=3(x^2+1)$ en $-2\pi\leq x\leq 2\pi$, esta se debe introducir como f$(x)=3_*(x^{**2}+1)$, en la cual x^{**2} significa la operación de elevar *x* al cuadrado, que en la pantalla del móvil se introduce usando el símbolo ^, el dominio *a* se escribe -2*pi y el *b*, 2*pi. La información se amplía en unas Instrucciones que aparecen al inicio de la aplicación.

La aplicación acepta los tres desarrollos de funciones en serie de Fourier, funciones pares, impares y ni pares ni impares e indica el tipo de paridad de la función introducida. Tiene la ventaja de devolver la función en lenguaje simbólico, así como su gráfica. Además, determina los coeficientes a_0, a_n y b_n dependiendo de la función *f(x)* incorporada, ofreciendo con detalle los pasos seguidos durante las operaciones de integración, evaluación de límites y factorización, tal como lo hacen los estudiantes en su cuaderno de trabajo. Al final, ofrece la función en su expresión desarrollada en serie de Fourier, así como la gráfica respectiva desplegada en períodos que van de a$\leq x\leq b$.

Si, por ejemplo, se desea introducir la función comentada líneas arriba: $f(t)=1-t, 0\leq t\leq 2$, de modo que al extenderla hacia la parte negativa en forma periódica esta sea impar, el usuario deberá realizar el trabajo de establecer la función resultante según su simetría, antes de incluirla en la aplicación. Como vimos esta es: $f(t)=\{-1-t,-2<t<0;\ 1-t,0<t<2\}$.

En la figura 3, se aprecian imágenes del trabajo desarrollado por la aplicación para llegar a la expresión antes vista: $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1^n)+1\right)\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}t)}{\pi n}$. Para que la aplicación devuelva resultados como el citado, el usuario sencillamente digita la expresión como se solicita en la primera pantalla, según el número de expresiones que integran la función por desarrollar. Para ello se utiliza el teclado del móvil, no obstante, al ingresar a la aplicación se advierten unas Instrucciones que muestran un ejemplo que ayuda ante cualquier duda.

Observe que la notación que devuelve es del todo simbólica y en el mismo orden que aparece en los libros de texto, así como del tipo empleado por los estudiantes. En este sentido, se puede afirmar que la aplicación fue creada desde una perspectiva didáctica, alejada de cualquier fin comercial.

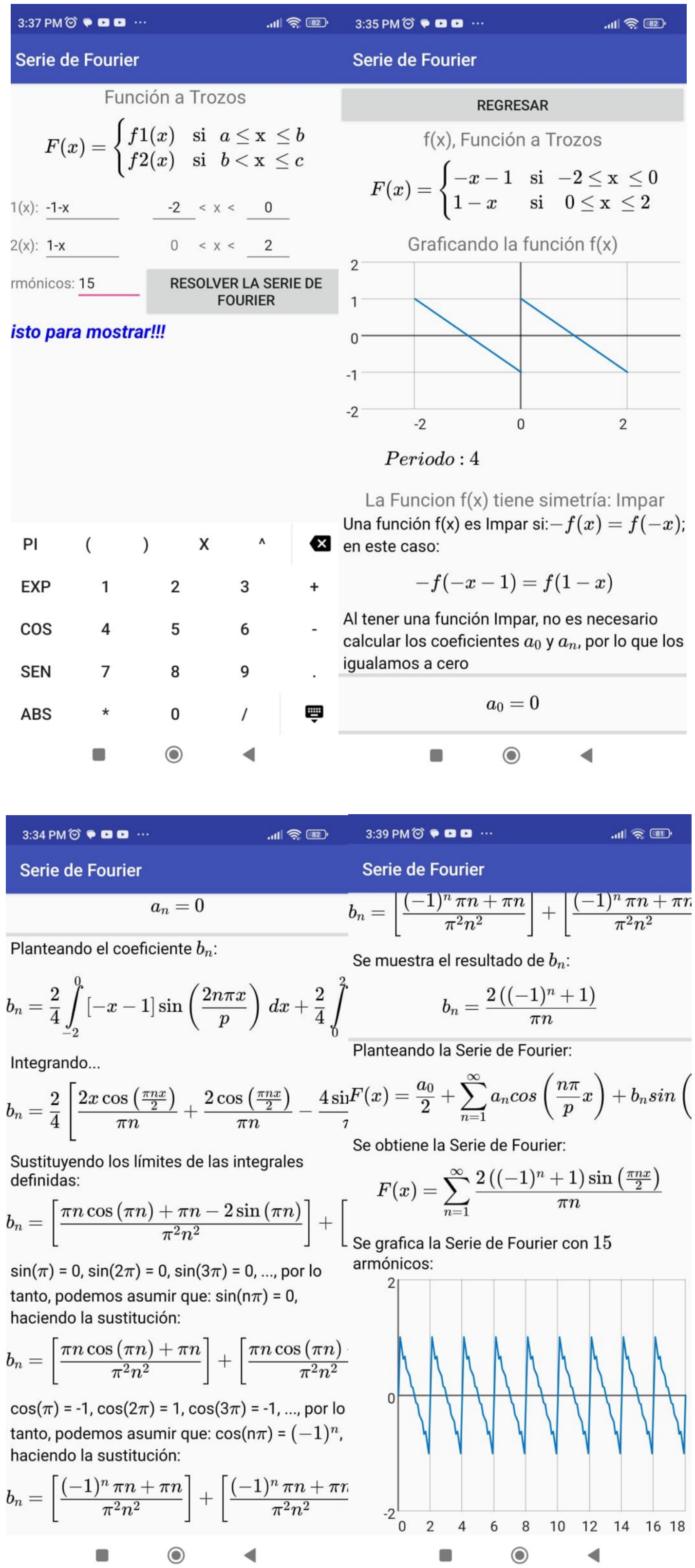


Figura 3. Desarrollo en la aplicación de una función impar en serie de Fourier.

Resultados

Los ostensivos, como por ejemplo el caso de $f(x)=3_*(x**^2+1)$, obedecen a una norma de naturaleza informática y son aquellos incorporados en el teclado del móvil. Estos últimos se caracterizan porque durante su manipulación intervienen acciones y ostensivos ajenos a los usuarios.

La técnica τ que destaca en la aplicación, es la misma definición de paridad de funciones, vista anteriormente:

$\theta\_1: f(t)=f(-t)$, entonces $f(t)$ es par

$\theta\_2: f(-t)=-f(t)$, entonces $f(t)$ es impar

Desde el punto de vista de la TAD, esa definición fue sometida por el autor a un proceso en el que se evaluó su adecuación a los estándares de la Institución informática I_i, convirtiéndola en un “objeto informático” que toma dos posiciones en la OM.

Esto último provoca un efecto transpositivo informático en OM_1: $[T\_1,\tau\_1,\theta,\Theta]$ para construir OM_2, la cual queda como OM_2: $[T\_1,\tau\_2=\theta,\theta,\Theta]$. En ésta, los objetos informáticos pasan a formar parte de las tareas, técnicas y tecnologías, lo cual muestra un valor instrumental importante de la técnica.

El efecto lleva a que, al utilizarse como objetos informáticos, las técnicas y tecnologías dejan de ser visibles, debido a que son encapsuladas en el código de programación. No obstante, la aplicación devuelve en forma de ostensivos las operaciones que resuelven el problema que, en cierta forma, les da validez.

La legitimación de las tecnologías $\tau\_2=\theta$ ocurre en la Institución informática I_i, no por una demostración basada en algunas definiciones o teoremas, como es común en el aula y libros de texto, sino por dos criterios de validación de la herramienta: uno de ellos es la revisión de su funcionamiento que hacen expertos para modificar el código hasta que la aplicación resulte útil y, el otro es, el uso repetido en el aula que realiza una buena cantidad de usuarios de la aplicación, lo cual garantiza la eficacia y usabilidad de la técnica $\tau=\theta$.

En la figura 4, I_u representa la institución escolar donde fue generada la OM_1, mientras I_i resulta ser la institución informática que la transformó en OM_2. El esquema revela hasta qué punto I_i opera como institución al utilizar en los desarrollos informáticos recursos praxeológicos que restringen las actividades del aula.

$$[T_1, \tau_1, \theta, \Theta]_{OM_1} \leftarrow I_u \leftrightarrow [T_1, \tau_2 = \theta, \theta, \Theta]_{OM_2} \leftarrow I_i$$

Figura 4. Efecto transpositivo informático provocado desde hacia por el desarrollador de la aplicación.

Balacheff (1994), deja abierta la explicación sobre la validez epistemológica de los desarrollos tecnológicos, incluso, es un tema que no se aborda en el artículo. Creemos que la validez de ese tipo de herramientas, principalmente de las representaciones del conocimiento en el medio informático, la otorgan los usuarios al interactuar con ellas y suscribir con su uso la adecuada resolución de problemas. Esta actividad desvanece posibles rupturas epistemológicas entre el conocimiento enseñado en el aula y su realidad en la herramienta. En la aplicación, la noción de práctica social sencillamente se diluye en el código de programación, sin guardar importancia.

Conclusiones

La Teoría Antropológica de lo Didáctico permite modelizar globalmente el problema de incorporar desarrollos tecnológicos en la enseñanza de la matemática. No obstante, la introducción de los desarrollos en el aula va acompañada de nuevos fenómenos relacionados con las restricciones impuestas durante la transposición informática de conocimientos. Principalmente, es posible analizar las restricciones entre ostensivos informáticos que se crean con praxeologías anidadas en OM_1 transferidas a OM_2, lo cual precisa de tomar en consideración la transposición informática que ocurre a los elementos tecnológicos.

Referencias

Acosta, M (2007). La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías. En L. Ruíz-Higueras; Estepa A.; García F. J. (Eds): Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (pp. 85-100). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén. Disponible en: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Recuperado de: https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190648/.

Barquero, B., Boch, M y Gascón, J. (2007). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de ciencias. Estudio de la dinámica de poblaciones. En L. Ruíz-Higueras.; Estepa A; García F. J. (Eds): Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (pp. 573-594). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007. Disponible en: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm

Bosch, M., y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77–124. https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/

Bronner, A., et Larguier, M. (2007). Quelles organisations mathématique et didactique pour les reprises du numérique et l´algebrique en seconde? En L. Ruíz-Higueras; Estepa A.; García F. J. (Eds): Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (pp. 595-620). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007. Disponible en: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm

Camacho, A. (2021). Función normativa de las prácticas asociadas a la construcción de templos antiguos, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 24* (2): 327-353. DOI: https://doi.org./10.12802/relime.21.2434.

Cantoral, R. (2016). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Editorial Gedisa S.A.

Castela y A. Romo-Vazquez (2022). Towards an institutional epistemology. In R. Biehler, G. Gueudet, M. Liebendörfer, C. Rasmussen, & C. Winslow (Eds), *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education: New Directions.* Springer, 2022.

Castela, C. (2009). La noción de praxeología: Un instrumento de la Teoría Antropológica de lo Didáctico posible útil para la Socioepistemología. En P. Lestón Patricia (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1195-1205). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, *22*(1).

Chaachoua, H., Bessot, A., Romo, A., y Castela C. (2029), "Developments and functionalities in the praxeological model". In M. Bosch, Y. Chevallard, F.J. Garcia, y J. Monaghan (Eds), *Working with the anthropological theory of the didactic: A comprehensive casebook.* (pp. 41-59), 2019. Routledge.

Chaquopy Ltd. (2023). Obtenido de Chaquopy: https://chaquo.com/chaquopy/

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 1999, 221–266.

Covián, O (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional. El caso de la cultura maya.* [Tesis de maestría no publicada. Cinvestav IPN].

Duarte, F. (2020). *Aplicación móvil para desarrollar y graficar series de Fourier* [tesis de Maestría en Sistemas Computacionales, inédita. TecNM, campus Chihuahua II, México].

García, D. (2020). *Aplicación móvil para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)* [tesis de Maestría en Sistemas Computacionales, inédita. TecNM, Chihuahua II campus, México].

Moreno, M., Camacho, A., Caldera-Franco, M y Alvarado, J. A (2022). Desarrollo de una aplicación para su uso en la enseñanza de la transformada de Laplace. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 7. https://doi.org/10.46618/iime.120

Zill, D. (2028). *Matemáticas avanzadas para ingeniería. Ecuaciones diferenciales*. (3ª ed., Vol. 4) McGraw-Hill, 2018.

Capítulo 5. Modelación en la enseñanza de las matemáticas

Chapter 5. Modeling in the teaching mathematics

Luis Fernando Plaza Gálvez
Unidad Central del Valle del Cauca – Colombia
lplaza@uceva.edu.co

Introducción

El ser parte de un equipo docente del área de las Ciencias Básicas, adscrita a la Facultad de Ingeniería, en la Unidad Central del Valle del Cauca, con sede en el municipio de Tuluá, departamento del Valle del Cauca de la república de Colombia, durante más de dieciocho años, ha permitido poner en práctica una serie de estrategias didácticas que ayuden con un mayor interés y actitud hacía las matemáticas por parte de los estudiantes. Es importante que se logre articular la resolución de problemas y la matemática a través de instrumentos como la modelación matemática, como lo sostienen Sánchez y Cruz (2019).

Es así como se evidenció la necesidad de coadyuvar con la respuesta a la pregunta que siempre se plantean nuestros alumnos en el transcurso del desarrollo de su carrera universitaria, la cual es: profesor (o maestro) y esto que nos está enseñando de la matemática ¿para qué nos sirve?, y es aquí donde el docente juega un papel importante, al poner en contexto todo tema matemático que sea objeto de enseñanza, pues todo lo que se predica en el aula, siempre tiene una aplicación directa o indirecta, y más cuando desde los primeros semestres el estudiante recibe la formación que va a poner en práctica en el desarrollo de sus cursos superiores.

Una de las más interesantes aplicaciones, es dada a través de la modelación matemática con la que se puede identificar y caracterizar fenómenos y/o procesos de nuestra vida cotidiana. En este sentido, Mejía et al. (2022), en su investigación, permitió conocer estrategias para resolver problemas matemáticos por medio de la modelación.

Este capítulo presenta la modelación matemática, como una forma distinta de enseñanza en un curso de Ecuaciones Diferenciales, y en el que se retoman algunas temáticas de cursos previos, en los que la gran mayoría de las veces no se logra evidenciar su importancia por parte del docente de curso, bien sea por razones de tiempo y espacio o por motivos personales. Al respecto es importante recordar las investigaciones de Nueva (2023), en la que se parte de las insuficiencias de conceptos previos de cálculo y ecuaciones diferenciales, especialmente cuando se modela, y de Arcila (2022) cuando se enseñan ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 2, por medio de la modelación de fenómenos cíclicos. En trabajos como los de Córdoba-Gómez et al. (2022), se evidencia como el estudiante, por medio de la modelación matemática se enfrenta a situaciones reales y en contexto de la matemática, como por ejemplo con la ley de enfriamiento de Newton.

Inicialmente, se requiere tener en cuenta el tema de ajuste de curvas, como concepto previo, el cual ha podido ser abordado en los cursos de Física 1 o Física 2, o Estadística y se desea encontrar la expresión matemática que al evaluarse, mejor se acerque a los datos reales, llegando a los escenarios de Regresión, los cuales pueden ser del tipo lineal, potencial, exponencial, logarítmica, polinomial o trigonométrica (función seno), asumiendo funciones continuas en un dominio especifico.

Posteriormente, se tiene en cuenta el tema de la diferenciación numérica centrada a tres pasos, como aplicación del teorema del valor medio o una extensión del teorema de Taylor, como punto de partida, al querer encontrar la derivada a una serie de datos (idealmente espaciados, respecto de la variable independiente). Esta diferenciación numérica, luego podrá ser mejorada si se tiene un mayor número de datos experimentales y para esto se requerirá un conocimiento inicial de métodos numéricos.

Al tener una relación por medio de números, de los datos experimentales y su derivada (numérica) se desea llegar a la mejor expresión matemática que la rige, logrando obtener una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, que podrá ser evaluada por el método de separación de variables. Esta es una forma de modelar matemáticamente un fenómeno y/o proceso previa deducción de una ecuación diferencial y su posterior solución. Esta solución podrá ser validada, por medio de un indicador estadístico llamado el Coeficiente de determinación y así finalmente, poder resolver un problema en contexto de ingeniería desde el aula, con los conocimientos adquiridos previamente. Experiencias similares se muestran en Lopes y da Silva Reis (2022) y en González et al. (2023).

Importante mencionar además algunos trabajos de modelación matemática para ingenieros, como prácticas de aula o investigación formativa, para lo que se recomienda ver a Plaza (2016) y Plaza (2017). Otras investigaciones, pero de mayor nivel sobre la Ley de enfriamiento, han sido llevadas a cabo por Ojeda-Misses y González-López (2023), en las que el modelo es obtenido a partir de una función de transferencia, y dado por medio del gradiente térmico del sistema.

Por lo tanto, este capítulo tiene como objetivo divulgar una estrategia didáctica, distinta y novedosa de como enseñar las Ecuaciones Diferenciales ordinarias (matemáticas en contexto) a través de la modelación de tal manera que ayude al docente a identificar una serie de aplicaciones de la matemática en la ingeniería.

Marco teórico

Se desea tener acceso a una base de datos de un fenómeno o proceso, la cual corresponde al comportamiento de variables de la forma , de tal manera que se llene una tabla como la siguiente (tabla 1).

Tabla 1

Base de datos de un fenómeno o proceso

u	v
u_1	v_1
u_2	v_2
u_3	v_3
.	.
.	.
u_{n-1}	v_{n-1}
u_n	v_n

Y con valores de la variable , igualmente espaciados, de tal manera que se cumpla

$$h=u_i- u_{i-1}$$

con h, conocido como el tamaño de paso y al llevar a un plano los datos de la tabla 1, se obtiene la figura 1, de puntos de la siguiente manera.

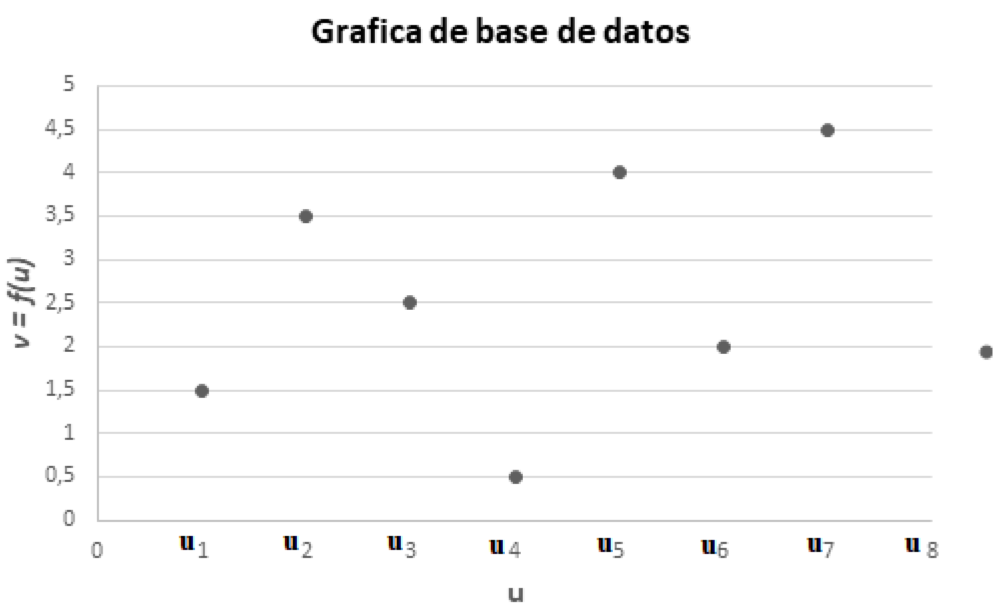


Figura 1. Gráfica de datos correspondientes a un proceso.

Ahora, recordando el Teorema del Valor Medio (ver figura 2), como aplicación de la derivada, el cual es a su vez una extensión del Teorema de Taylor (Stewart, 2021), donde se puede hacer la aproximación polinómica de una función, así

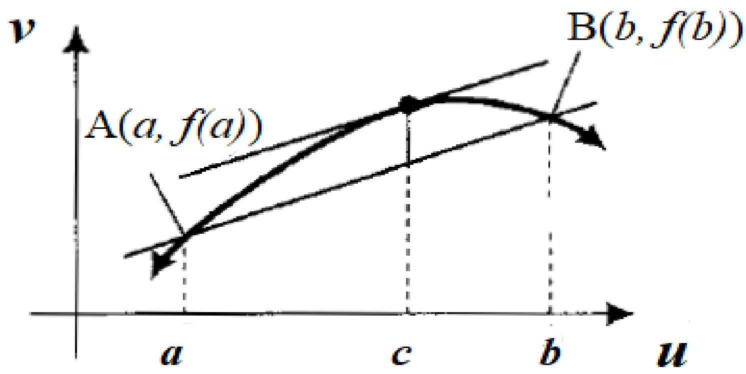


Figura 2. Teorema del Valor Medio.

De donde se afirma que si una función es continua en el intervalo cerrado [a,b] y diferenciable en el intervalo abierto *(a,b)*, entonces existe un punto c contenido en el intervalo *(a,b)*, tal que *f'(c)*, es igual a la razón de cambio promedio de la función en *[a,b]*, en otras palabras, si las pendientes de las rectas secante y pendiente son iguales, por el hecho de ser rectas paralelas, llegando a:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Y si la separación entre a y c, es la misma entre c y b, y esta adopta el valor de , con la anterior expresión se llega a

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{2h}$$

Ahora adaptando este último resultado se puede calcular la derivada de la función , para cualquier instante , tal como se exponen en Chapra y Canale (2015), de la siguiente manera:

$$v'(u_i) = \frac{v(u_{i+1}) - v(u_{i-1})}{2h}$$

No olvidar que $h=u_i- ui -1$, de donde se puede concluir que no es posible encontrar la derivada para el primer y último datos de la tabla 1.

Con base en la última expresión, y teniendo en cuenta la tabla 1, se procede a encontrar la derivada numérica en la tabla 2, de la siguiente manera:

Tabla 2

Cálculo de la derivada numérica a la base de datos inicial

u	v	v'
u_1	v_1	
u_2	v_2	v'_2
u_3	v_3	v'_3
.	.	.
.	.	.
u_{n-1}	v_{n-1}	v'_{n-1}
u_n	v_n	

La cual permite encontrar la derivada numérica a partir de datos conocidos, siempre y cuando estén igualmente espaciados. Aquí se aproxima la base de datos obtenidos de un proceso, como si estos correspondieran a datos de una función continua, tal como lo exige el Teorema del Valor Medio, para derivadas.

Posteriormente se hace el análisis gráfico del comportamiento de los siguientes escenarios, para así buscar mediante el ajuste por Mínimo cuadrados, la mejor curva de aproximación. Los dos escenarios posibles serían

$$v'=f(u)$$

$$v'=f(v)$$

Para el primer caso, se analiza el comportamiento entre la primera y la tercera columna de la tabla 2, para el segundo caso se analiza el comportamiento entre la segunda y la tercera columna de la misma tabla 2, originando de esta manera la ecuación diferencial que mejor modele el sistema en estudio.

En ambos escenarios, serán tenidos en cuenta los diferentes tipos de regresión con los cuales se cuenta a través de ayudas TIC como son el Excel, el GeoGebra, Matlab, Scilab, SPSS, Maple entre otros. Algunos tipos de regresión son los siguientes, con la respectiva curva de ajuste de aproximación:

- Regresión Lineal

$$y=ax+b$$

- Regresión Exponencial

$$y=ae^{bx}$$

- Regresión Potencial

$$y=ax^b$$

- Regresión Logarítmica

$$y=aLn(x)+b$$

- Regresión Polinómica

$$y=ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g$$

- Regresión Trigonométrica

$$y=f(x)= a.sen(bx+c)+d$$

En todos los casos anteriores, los parámetros a, b, c, d, e, f. g, según sea el caso lo arroja el software respectivo a partir de la base de datos. Siempre la variable x en este caso hará las veces de variable independiente, o en otras palabras los datos que hagan las veces de primera columna y la y la que juegue el papel de la segunda columna, o sea la variable dependiente. Así de esta manera se podrá originar una ecuación diferencial con varias opciones, partiendo de los dos escenarios antes planteados.

La curva de regresión planteada (ecuación diferencial) seleccionada, será aquella que presente como indicador el mejor Coeficiente de Determinación R^2 , el cual es un valor que está entre cero y uno $0\leq R^2\leq 1$, tal como se recomienda en Bacchini et al. (2018). Entre más cercano este a 1, mejor será la aproximación y donde la ecuación diferencial ordinaria, originada pueda ser resuelta por uno de los métodos vistos en un curso tradicional de Ecuaciones Diferenciales.

Práctica de la Modelación Matemática como estrategia didáctica. Ley de enfriamiento de Newton

Por medio de la siguiente estrategia se desea modelar el proceso mediante el cual cambia la temperatura en un cuerpo a través del tiempo, es decir $T=f(t)$. En otras palabras, se va a comprobar la Ley de Enfriamiento de Newton, deduciendo su ecuación Diferencial, en la que se establece que la rapidez con la que cambia la temperatura en un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia que hay entre el cuerpo y su temperatura ambiente. Algunas de estas prácticas, se han llevado a cabo en Plaza y Castrillón (2022), en el que la modelación matemática en contexto puede ver vista como un instrumento para aplicar las matemáticas y en Miller (2021), donde se estimula al estudiante a través de la modelación matemática.

La práctica es llevada a cabo en un Laboratorio de Matemáticas. Para lo anterior, se dispondrá con el proceso de la toma de datos del enfriamiento de *100 ml* de agua después de haber llegado a su punto de ebullición, para eso se debe disponer de los siguientes instrumentos: Un termómetro tipo industrial, un beaker y una estufa eléctrica (ver figura 3).

Figura 3. Elementos necesarios para la práctica *La Ley de Enfriamiento de Newton*.

La cantidad de agua asignada es depositada en el beaker. Posteriormente este recipiente junto con el agua es ubicado en la estufa y puesta al calor hasta lograr su punto de ebullición. Posteriormente, se retira la fuente de calor y se toman datos de tiempo y temperatura (ver figura 4), hasta llegar aproximadamente a la temperatura ambiente, los cuales son consignados en la tabla 3.

Figura 4. Toma de datos de tiempo y temperatura.

Tabla 3

Toma de datos en laboratorio

t (min)	Tr(°C)	t (min)	Tr(°C)	t (min)	Tr(°C)
0	99	16	44,4	32	32
1	87,9	17	43,5	33	31,4
2	81,3	18	42,3	34	30,6
3	72,9	19	40,8	35	30,6
4	69,9	20	40,1	36	30,4
5	65,5	21	38,7	37	30,2

6	62,8	22	38,4	38	30
7	59,4	23	36,2	39	29,6
8	56,2	24	35,6	40	29,7
9	55,4	25	35,4	41	29,3
10	53,1	26	35,3	42	28,3
11	51,6	27	34,9	43	28,3
12	49,3	28	34,2	44	27,5
13	47,2	29	33,7	45	27,4
14	46,3	30	32,9		
15	45,3	31	32,5		

A la anterior base de datos se le deduce la diferenciación numérica, de la siguiente manera, la cual se consigna en la tabla 4:

Tabla 4

Cálculo de la derivada numérica partiendo de la tabla 3.

t (min)	Tr(°C)	T´	t (min)	Tr(°C)	T´	t (min)	Tr(°C)	T´
0	99		16	44,4	-0,9	32	32	-0,55
1	87,9	-8,85	17	43,5	-1,05	33	31,4	-0,7
2	81,3	-7,5	18	42,3	-1,35	34	30,6	-0,4
3	72,9	-5,7	19	40,8	-1,1	35	30,6	-0,1
4	69,9	-3,7	20	40,1	-1,05	36	30,4	-0,2
5	65,5	-3,55	21	38,7	-0,85	37	30,2	-0,2
6	62,8	-3,05	22	38,4	-1,25	38	30	-0,3
7	59,4	-3,3	23	36,2	-1,4	39	29,6	-0,15
8	56,2	-2	24	35,6	-0,4	40	29,7	-0,15
9	55,4	-1,55	25	35,4	-0,15	41	29,3	-0,7
10	53,1	-1,9	26	35,3	-0,25	42	28,3	-0,5
11	51,6	-1,9	27	34,9	-0,55	43	28,3	-0,4
12	49,3	-2,2	28	34,2	-0,6	44	27,5	-0,45
13	47,2	-1,5	29	33,7	-0,65	45	27,4	
14	46,3	-0,95	30	32,9	-0,6			
15	45,3	-0,95	31	32,5	-0,45			

Partiendo de la tabla 4, se hace la figura 5 entre Tr y T´, con ayuda del Excel. Se observa que el mejor comportamiento obedece a una línea recta con pendiente negativa, por lo que se procede a realizar la respectiva regresión lineal, arrojando los siguientes resultados:

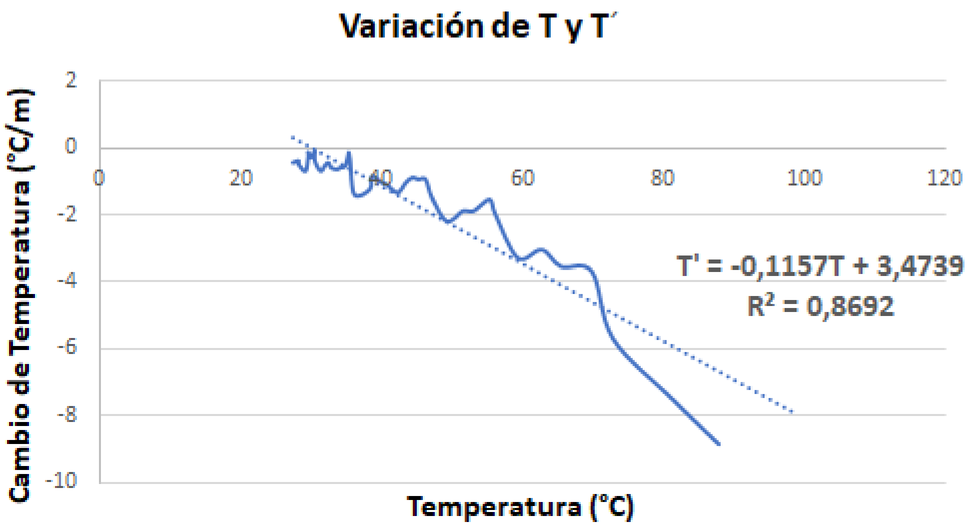


Figura 5. Rapidez con la cambia la temperatura en el proceso de enfriamiento.

La regresión permite encontrar una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, donde la condición inicial la aporta la primera fila de la tabla de la base datos (punto de ebullición), donde al resolverse se obtiene:

$$\frac{dT}{dt} = -0{,}1157T + 3{,}4739$$

$$\frac{dT}{dt} = -0{,}1157(T - 30{,}025)$$

$$\frac{dT}{T - 30{,}025} = -0{,}1157dt$$

$$\int \frac{dT}{T - 30{,}025} = \int -0{,}1157dt$$

$$Ln\,|T - 30{,}025| = -0{,}1157t + C$$

$$T = Ke^{-0{,}1157t} + 30{,}025$$

Para encontrar la contante de integración , se hace uso de la condición inicial $T(0)=99$, por lo que al evaluarse se llega finalmente a la solución del modelo matemático.

$$T = 68{,}97e^{-0{,}1157t} + 30{,}025$$

Análisis de resultados

Ahora se procede a tabular esta expresión para los mismos valores de tiempo en la base de datos inicial, así como la gráfica comparativa entre los datos reales de Temperatura y los aproximados que arroja el modelo, así (ver tabla 5 y figura 6):

Tabla 5

Comparación entre datos reales y aproximados de temperatura

t (min)	Tr(°C)	Ta°C)	t (min)	Tr(°C)	Ta°C)	t (min)	Tr(°C)	Ta°C)
0	99	99,00	16	44,4	40,86	32	32	31,73
1	87,9	91,46	17	43,5	39,67	33	31,4	31,54
2	81,3	84,75	18	42,3	38,62	34	30,6	31,37
3	72,9	78,77	19	40,8	37,68	35	30,6	31,23
4	69,9	73,44	20	40,1	36,84	36	30,4	31,10
5	65,5	68,70	21	38,7	36,10	37	30,2	30,98
6	62,8	64,47	22	38,4	35,44	38	30	30,87
7	59,4	60,71	23	36,2	34,84	39	29,6	30,78
8	56,2	57,36	24	35,6	34,32	40	29,7	30,70
9	55,4	54,37	25	35,4	33,85	41	29,3	30,63
10	53,1	51,71	26	35,3	33,43	42	28,3	30,56
11	51,6	49,34	27	34,9	33,06	43	28,3	30,50
12	49,3	47,23	28	34,2	32,73	44	27,5	30,45
13	47,2	45,35	29	33,7	32,43	45	27,4	30,40
14	46,3	43,68	30	32,9	32,17			
15	45,3	42,19	31	32,5	31,93			

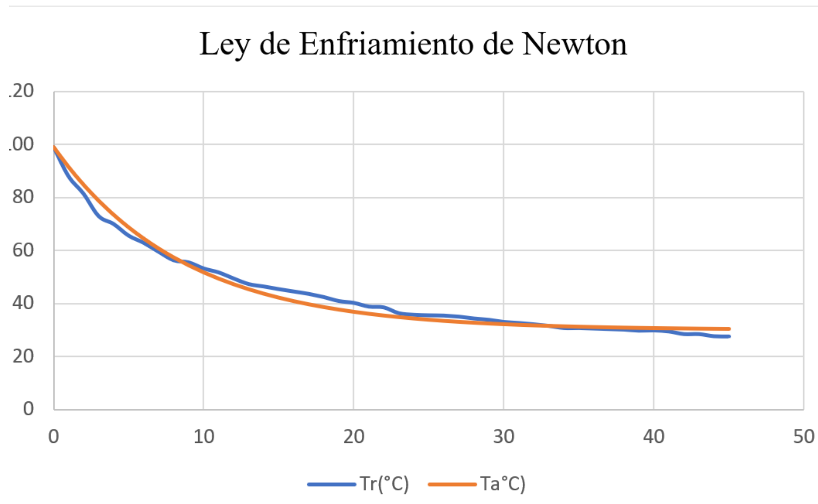


Figura 6. Análisis comparativo entre datos reales Tr y aproximados Ta.

Al analizar la figura 6, donde se comparan los resultados obtenidos de la curva de ajuste y los datos reales tomados en el laboratorio, se evidencia la gran cercanía que tienen los datos entre sí. Su validez, será teniendo en cuenta para ello los resultados de la última tabla, al obtener un Coeficiente de determinación (con ayuda del Excel) $R^2=0,984$, lo cual por su cercanía a *1*, se concluye que es un modelo casi perfecto.

Conclusiones

Por medio de la estrategia didáctica planteada a través de esta práctica, se pudo modelar el fenómeno que ya había sido estudiado por Isaac Newton, respecto a la ley de Enfriamiento y/o Calentamiento de Newton, donde esta metodología puede ser usada en otros contextos.

Se pudo poner en práctica, algunos conceptos previos de Cálculo y Estadística, en los cuales se evidencio su aplicación en una investigación de aula. Por medio de la modelación matemática y con el uso de los diferentes tipos de regresión que el software permita, se podrá hacer simulación y determinar cuál es la mejor solución (expresión matemática propuesta) y de esta manera se experimenta una aplicación a la resolución de un problema en particular, incluso actuando con una actitud crítica

La modelación matemática, permite un acercamiento del estudiante a la matemática, valorando su comprensión y aplicación, y a su vez le ayuda al docente a estudiar otras opciones de enseñar la matemática que es recibida con agrado y satisfacción. De esta manera, se ve la gran aplicación de la matemática al resolver problemas de la vida real.

Recomendaciones

Así como la práctica fue hecha con 100 ml de agua, se puede hacer con otras cantidades distintas (a mayor volumen de agua, mayor será el tiempo para llegar al punto de ebullición). Se podrá hacer a diferentes alturas sobre el nivel del mar (a mayor altura el punto de ebullición baja, por la presión atmosférica). Así finalmente se pueden obtener patrones matemáticos, y tratar de obtener una expresión para la temperatura en términos de varias variables (tiempo, volumen, altura sobre el nivel mar) como una contribución de un principio de superposición.

Se recomienda hacer la práctica, con otro tipo de líquidos y a partir de sus propiedades fisicoquímicas, tratar de teorizar al respecto, esto como una herramienta de investigación.

Así como se partió del comportamiento de una magnitud (temperatura) en función del tiempo, se pueden buscar otro tipo de variables que también dependan cambien con el tiempo y construir modelos matemáticos, partiendo de ecuaciones diferenciales.

Referencias

Arcila, E. (2022). *La modelación matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en los programas de ingeniería de la Institución Universitaria Antonio José Camacho*. [Tesis de Maestría inédita]. Universidad Tecnológica de Pereira. https://hdl.handle.net/11059/13976

Bacchini, R., Vázquez, L. Bianco, M. y García, J. (2018). *Introducción a la Probabilidad y a la Estadística*, (1ª. ed.). Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas

Chapra, S., y Canale, R. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros*, (7ª. ed.). Ciudad de México D.F.: McGraw-Hill Education.

Córdoba-Gómez, F. J., Galánb, C. A. P., & Hernández-Suárezc, C. A. (2022). Student Interactions In The Redefinition Of The Concept Of Differential Equation: Modelling Of The Law Of Cooling. *NVEO-NATURAL VOLATILES & ESSENTIAL OILS Journal| NVEO*, *9*(4), 159-172. https://www.nveo.org/index.php/journal/article/view/5379

González, J., Plaza, L. & Arcila, E. (2023). Mathematical Modeling Using Second-Order Differential Equations: A Case Study of a Mass-Spring System. *Journal of Hunan University Natural Sciences*, *50*(7). https://doi.org/10.55463/issn.1674-2974.50.7.14

Lopes, A., & da Silva Reis, F. (2022). Contributions of mathematical modelling for learning differential equations in the remote teaching context. *Acta Scientiae*, *24*(3), 184-215. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7011

Mejía, L., Gallo, C. & Quintana. J. (2022). La modelación matemática como estrategia didáctica para la resolución de problemas matemáticos. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación, 6*(26), 2204-2218.http://www.scielo.org.bo/scielo.php?pid=S2616-79642022000502204&script=sci_arttext

Miller, N. L. (2021). Modelación matemática en un curso de pregrado de EDO. *Prisma Tecnológico*, 12(1), 28-31. https://revistas.utp.ac.pa/index.php/prisma/article/view/2875/3677

Nueva, S. F. (2023). Experiencias Docentes Metodología para la enseñanza de la modelación matemática de problemas de la profesión, vía ecuaciones diferenciales. *Pensamiento Matemático*, 13(1), 25-37. https://revista.giepm.com/wp-content/uploads/ExpDoc_Modelizacion_Vol_XIII.pdf

Ojeda-Misses, M.A., González-López, J.C.,(2023). Simulación numérica del control de temperatura para un modelo de parámetros concentrados obtenido de la ley de enfriamiento de

Newton. *Ingeniería Investigación y Tecnología, 24* (03), 1-9. https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2023.24.3.020

Plaza, L. (2016). Modelación matemática en ingeniería. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH, 7*(13), 47-57. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/pdf/ierediech/v7n13/2448-8550-ierediech-7-13-00047.pdf

Plaza, L. (2017). Modelo Matemático para vaciado de Tanques. *Scientia et technica, 22*(1), 89 - 94. Disponible en: https://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/9185

Plaza, L., y Castrillón-Yepes, A. (2022). *Prácticas de modelación matemática en un curso de Ecuaciones Diferenciales para Ingenieros.* En Serna, Edgar (Ed.), Situaciones de modelación matemática para el aula: Aportes para diferentes niveles formativos (pp. 73-89). Medellín, Colombia: Editorial Instituto Antioqueño de Investigación. http://funes.uniandes.edu.co/31038/

Sánchez, O. F., & Cruz, M. A. (2019). El proceso de modelación en clase de Matemática. *Scientia et technica, 24*(1), 96-103. https://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/17261

Stewart, J. (2021). *Cálculo. Trascendentes Tempranas*. (9ª. ed.). Ciudad de México: Cengage Learning.

Capítulo 6. Modelización para la enseñanza de las matemáticas a través del ciclo de Deming

Chapter 6. Modeling for mathematics teaching through the Deming cycle

Oscar Rubén Gómez Aldama*
Lamberto Castro Arce
Viridiana Gómez Barrón
Universidad de Sonora
*oscar.gomez@unison.mx

Introducción

Actualmente, la estructura social y económica a nivel mundial se está transformando debido a la implementación de los grandes avances científicos y tecnológicos generados en las diferentes áreas del conocimiento, como son: matemáticas, física, química, biología, electrónica, computación, entre otras. Por lo que, las universidades del país tendrán necesariamente que enfrentar el reto de implementar en las carreras que ofrece, estos avances científicos y tecnológicos. El lenguaje matemático está presente en las diferentes áreas del conocimiento como un instrumento indispensable de progreso, por lo que, los estudiantes de las diferentes carreras necesitan aprenderlo para alcanzar los objetivos específicos que demandan los sistemas productivos de clase mundial.

Las matemáticas que se enseñan en las diferentes carreras universitarias representan un problema de aprendizaje para los estudiantes, debido a que se les enseña en forma compleja, abstracta y de poca practicidad en las actividades propias a desarrollar como futuros profesionistas. Polya (1965) establece que una forma en que las matemáticas pueden estudiarse muy bien sin caer en el vacío de lo abstracto y logrando en cambio un perfecto equilibrio entre lo formal e intuitivo y entre lo teórico y las aplicaciones prácticas, es con la aplicación de algún método didáctico inductivo.

La impartición de los cursos de matemáticas, aún con métodos modernos e innovadores en su presentación, sigue siendo en la mayoría de los casos arcaica, desde el punto vista pedagógico, ya que está basada meramente en la transmisión de conocimientos intentando hacer razonar a los alumnos en una forma axiomática. El campo de las matemáticas permite el pleno desarrollo de la personalidad y la conquista de los instrumentos lógicos o racionales que aseguren su autonomía intelectual, los cuales están obstaculizados sin cesar en la práctica de la enseñanza tradicional (Piaget,1983).

Otro elemento de interés hoy en día, son los problemas matemáticos surgidos en la Ciencia, Tecnología y en la Sociedad, los cuales es necesario resolver mediante un ordenador, definido éste como un conglomerado de programas, algoritmos, matemáticas clásicas y análisis numérico, entre otras teorías (Technologies, 2021). En esta propuesta metodológica se utiliza el Software Matrix Laboratory (Matlab) Versión R2018b. Matlab es un sistema interactivo único que integra cómputo numérico, matemáticas simbólicas y visualización gráfica en dos y tres dimensiones (Hahn y Valentine, 2019).

Al implementar el ciclo de Deming en un sistema productivo, los estándares de calidad de un proceso mejoran y, como se trata de un círculo, es posible iniciar el sistema de mejora continua hasta llevarlo a la optimización de la calidad (Obando, 2023). Desarrollar un proceso de enseñanza-aprendizaje bajo la premisa de mejora continua como parte del ciclo de Deming, implica que el docente aplique estrategias didácticas innovadoras para que el proceso de transmisión sea efectivo y, que el estudiante demuestre lo aprendido y la estrategia que utiliza para conseguir su objetivo (Urrelo, 2017).

Salas-Rueda (2018) propone la aplicación del ciclo de Deming para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre el método de Gauss-Jordan por medio de la tecnología, concluyendo, que éste permite construir experiencias educativas creativas para el campo de las matemáticas.

Vázquez (2014) diseñó actividades didácticas basadas en modelización matemática para la formación de ingenieros, destacando, como este recurso ha ido ocupando un espacio importante. Además, analiza el uso de modelos matemáticos en contextos de ingeniería para reconocer las necesidades matemáticas que surgen en dicho uso, resaltando, como los roles de la enseñanza de las matemáticas se han ido modificando a medida que la formación y la práctica ingenieril evolucionan.

Bosch et al (2006) proponen una reformulación del proceso de modelización a través de la Teoría Antropológica de lo Didáctico que se implementa en el problema de la articulación de la matemática escolar. Además, establece la necesidad de trabajar en el estudio y problematización de los procesos de modelización y, el impacto que tienen en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Brito-Vallina et al (2011) proponen una estrategia metodológica que toma en cuenta la concepción científica más moderna sobre modelación. Esta estrategia posibilita estructurar de modo sistémico el desarrollo de la habilidad de modelar, teniendo en cuenta la clasificación de los principales modelos matemáticos para las ingenierías y las principales categorías didácticas del proceso de enseñanza – aprendizaje.

Por lo anterior, en este capítulo se aplica estratégicamente la filosofía de calidad al proceso de modelización de enseñanza de las matemáticas, con la finalidad de hacer eficiente la actividad que el personal docente desempeña en el aula y lograr el éxito de aprendizaje de los estudiantes en el Siglo XXI.

Método

Ciclo de Deming

El *ciclo de Deming* es un método que busca optimizar permanentemente las operaciones de un proceso (personal, material, métodos, máquinas, mediciones y entorno), (ver figura 1), mediante una secuencia lógica de cuatro fases: Planificar, Hacer, Verificar y Actuar (Imai, 1991), las cuales se describen a continuación:

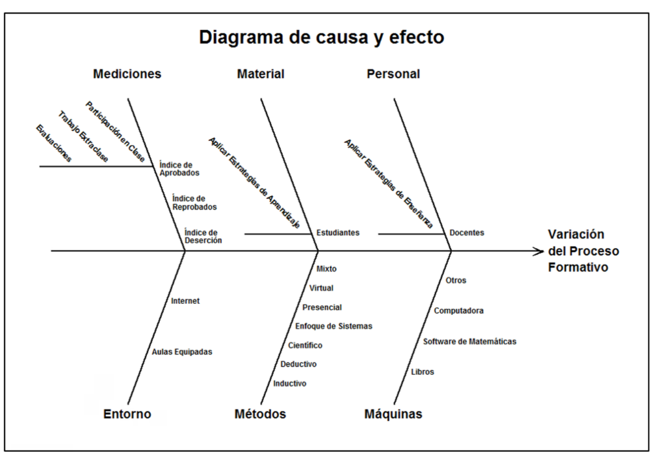


Figura 1. Proceso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

- Planear: En esta primera fase se establecen los objetivos que se quieren alcanzar, la elección de los métodos adecuados para lograrlos, supuestos y, además, se define el problema a resolver.
- Hacer: Esta segunda fase consiste en llevar a cabo el trabajo y las acciones correctivas planificadas en la fase anterior. Corresponde a esta fase la formación y educación del personal docente para que adquieran un adiestramiento en las actividades y actitudes que se han de llevar a cabo.
- Verificar: En esta tercera fase es el momento de verificar y controlar los efectos y resultados que surjan de aplicar las mejoras planificadas. Se ha de comprobar si los objetivos marcados se han logrado o, si no es así, planificar de nuevo para tratar de superarlos.
- Actuar: En esta última fase, una vez que se ha comprobado que las acciones emprendidas han dado el resultado esperado, es necesario realizar su estandarización mediante una documentación adecuada, describiendo lo aprendido, cómo se ha llevado a cabo. Las cuatro fases se muestran en la figura 2.

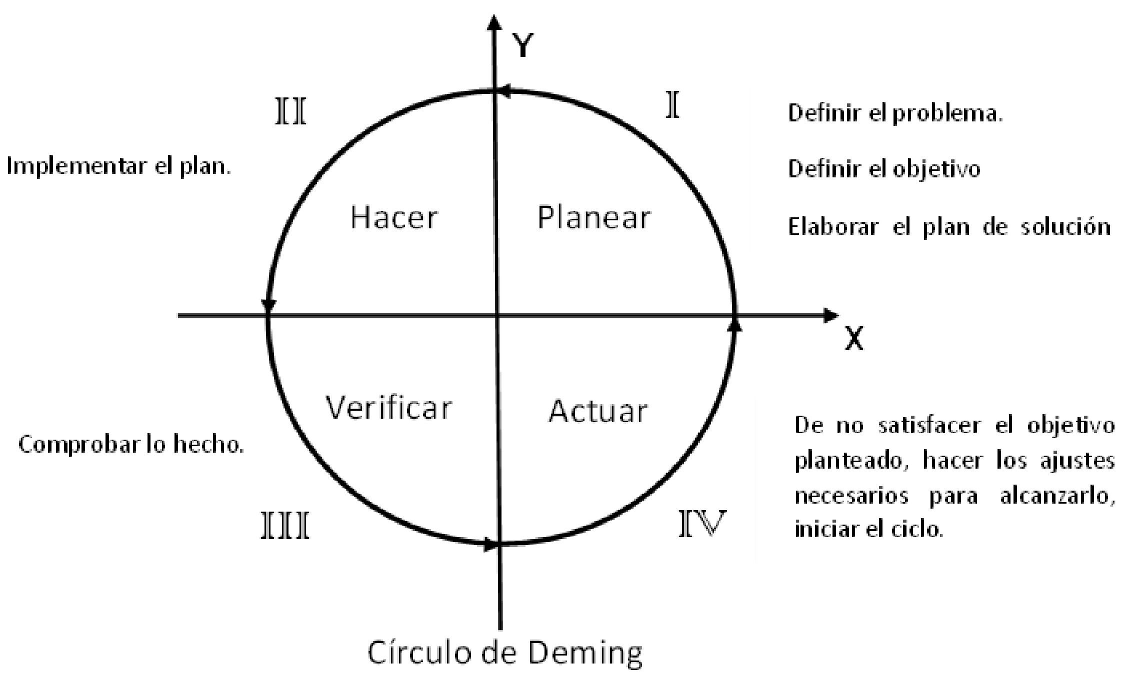


Figura 2. Mejoramiento continuo de procesos en sistemas productivos.

Modelación Matemática

La modelación matemática permite integrar el binomio herramientas matemáticas (modelos matemáticos) y la vida cotidiana (fenómenos), es decir, se ocupa en determinar el modelo matemático que explica en forma eficiente el fenómeno de estudio.

Es evidente que la modelación matemática, como método de enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles de escolaridad, propicia en el estudiante interés por las matemáticas, resolución de situaciones-problema, uso eficiente de la tecnología, capacidad para realizar investigación y trabajo en grupo. (Biembengut y Hein, 2004).

Modelación para la enseñanza de las matemáticas

Con el desarrollo de la solución del problema A se pretende explicar la modelización matemática a través del uso del ciclo de Deming.

Problema A. Una bala se introduce en una tabla de $h=10\ cm=0.1m$ de espesor con velocidad de $v_0=200\ m/s$ y traspasándola con velocidad $v_1=80\ m/s$. Suponiendo que la resistencia de la tabla al movimiento de la bala es proporcional al cuadrado de la velocidad, hallar el tiempo de movimiento de la bala por la tabla. (Kiseliov et. al, 1997, p.37). Solución del problema:

El problema planteado se resuelve a través de las cuatro fases que conforman el ciclo de Deming:

Primera fase: Planear

En la planeación como primera fase de solución del problema es necesario considerar los siguientes elementos:

- Comprensión del problema: tener claro la información que se tiene, es decir, cuáles son los datos, las condiciones y la(s) incógnita(s) (Polya, 1965).
- Dada la información, preguntarse: ¿qué relación hay entre la(s) incógnita(s) y dato(s)?, ¿se ha encontrado con un problema semejante?, ¿conoce algún teorema útil?, ¿podrá enunciar el problema en otra forma?, ¿ha empleado todos los datos?
- Representar geométricamente el fenómeno de estudio, como se muestra en la figura 3.

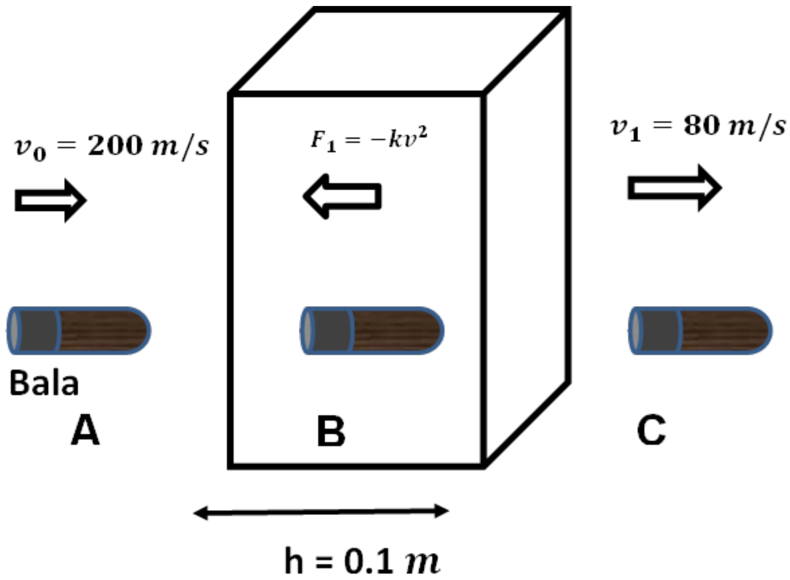


Figura 3. Tabla de espesor h donde se introduce la bala.

Con base en la figura 3 se genera la siguiente información:

- Tres regiones A, B y C, A muestra el movimiento de la bala fuera de la tabla, B el movimiento de la bala por la tabla y C la salida de la bala.
- La velocidad de entrada de la bala por la tabla es de $v_0=200\ m/s$, se considera en el análisis que sucede para un tiempo $t=0\ s$, generando la condición inicial $P_0=(0,200)$ y la velocidad de salida de la bala de la tabla es de $v_1=80\ m/s$, y sucede en un tiempo t a determinar, generando el punto $P_1=(t,80)$.
- Existe una fuerza F_1 de resistencia al movimiento de la bala por la tabla, se considera negativa por oponerse al movimiento de la bala $F_1=-kv^2$.
- El espesor de la tabla es $h=10\ cm=0.1\ m$. Se cambió de unidades de cm a m, para homogenizar la información.
- La velocidad de entrada de la bala por la tabla de $v_0=200\ m/s$, se considera en el análisis que sucede para una posición de $x=0\ m$, generando la condición inicial $P_{01}=(0,200)$ y la velocidad de salida de la bala de la tabla es de $v_1=80\ m/s$, y sucede para una posición de $x=0.1\ m$, generando el punto $P_{11}=(0.1,80)$.

- Con base en la información del problema A, se propone, como modelo matemático a utilizar en la dinámica del sistema, la segunda Ley de Newton, debido a que relaciona magnitudes de posición, velocidad y aceleración.

Segunda Ley de Newton: cuando se ha logrado cambiar el estado inercial del sistema, a través de una acción o fuerza es posible relacionar y cuantificar dicha acción con los cambios producidos. Y se encuentra la relación de fuerza, aceleración y masa. (ver tabla 1), (Serway, 2018).

Tabla 1
Dinámica de la segunda ley de Newton

$F=ma$	Una acción o fuerza es igual al producto de la masa y la aceleración .
$F = m\frac{dv}{dt}$	Cuando la fuerza aplicada, logra vencer un estado de inercia en reposo, se producen cambios en su velocidad inicial.
$F = m\frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\right] = m\frac{dx^2}{dt^2}$	Al aplicar una fuerza en su estado de movimiento constante, se producen cambios sobre su estado de movimiento a través de la velocidad, (Giancoli, 2006).

- El objetivo del Problema A es, entonces, determinar el tiempo de movimiento de la bala por la tabla, se supone que los datos observados y el modelo matemático propuesto son los correctos.

Segunda fase: Hacer

En Hacer como segunda fase de solución del problema, es necesario considerar los siguientes elementos:

- Ejecutar el plan: Resolver el problema a través de su desarrollo cuantitativo numérico. Analizar cada uno de los pasos desarrollados.
- Resolver el problema con algún software: GeoGebra, Matlab, Maple, Mathematica, Minitab, SolidCAM, entre otros.
- Al personal docente es importante informarle que el mismo modelo matemático resuelve problemas de diferentes áreas de investigación científica y, que un problema puede resolverse mediante diferentes modelos matemáticos, lo que va a variar es la información y la identificación de los parámetros de interés.

Aspecto Cuantitativo numérico

Aplicando la segunda ley de Newton al sistema dinámico en estudio, en términos de las variables de velocidad y tiempo, y considerando que F_1 es negativa por ser la fuerza de resistencia al movimiento de la bala por la tabla.

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = F_1 = -kv^2$$

Se obtiene la ecuación $m\frac{dv}{dt} = -kv^2$, la cual resolviéndola por el método de separación de variables (Zill et al, 2018) se obtiene:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}dt$$

Definiendo los límites de integración de acuerdo con los datos de tiempo y velocidad del problema $P_0=(0,200)$ y $P_1=(t,80)$, se tiene:

$$\int_{200}^{80} \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

Resolviendo las integrales

$$\left.\frac{-1}{v}\right|_{200}^{80} = \left.\frac{-kt}{m}\right|_0^t$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo (TFC) (Leithold, 1996, p.360), se tiene que:

$$\frac{1}{200} - \frac{1}{80} = -\frac{k}{m}t$$

Despejando t se obtiene la igualdad:

$$t = \frac{3m}{400k}$$

Para obtener la información del término $\frac{m}{k}$, es necesario desarrollar la segunda ley de Newton en términos de las variables de velocidad y posición, la cual requiere de la regla de la cadena (Young y Freedman, 2018):

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} = -kv^2$$

El modelo matemático obtenido, está dado por la ecuación:

$$mv\frac{dv}{dx} = -kv^2$$

Resolviendo la ecuación por el método de separación de variables (Simmons, 2016) se obtiene:

$$\frac{m}{k}\frac{dv}{v} = -dx$$

Definiendo los límites de integración con los datos de posición y velocidad $P_{01}=(0,200)$ y $P_{11}=(0.1,80)$ del problema:

$$\frac{m}{k}\int_{200}^{80}\frac{dv}{v} = -\int_{0}^{0.1} dx$$

Resolviendo las integrales, se tiene:

$$\frac{m}{k}\ln v\Big|_{200}^{80} = -x|_0^{0.1}$$

Aplicando el TFC se tiene que:

$$\frac{m}{k}\left(\ln\left|\frac{2}{5}\right|\right) = -\frac{1}{10}$$

Despejando $\frac{m}{k}$ se obtiene:

$$\frac{m}{k} = -\frac{1}{10\ln(0.4)}$$

Substituyendo en el despeje

$$t = \frac{3m}{400k} = \frac{3}{400}\left(-\frac{1}{10\ln(0.4)}\right) = 8.185175 * 10^{-4}\ s.$$

Resolviendo el problema con el uso de Tecnología

La solución de las ecuaciones diferenciales de primer grado y primer orden se realizó a través del Software Matrix Laboratory (Matlab) Versión R2018b (Báez-López, 2012; Moore, 2017).

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

v= dsolve(‘Dv =-(k/m)*v^2’,’v(0)=200’,’t’)

v =1/((k*t)/m + 1/200)

$$mv\frac{dv}{dx} = -kv^2$$

v= dsolve(‘Dv=-(k/m)*v’, ‘v(0)=200’,’x’)

v =200*exp(-(k*x)/m)

Igualando las ecuaciones:

$$\frac{1}{\left(\frac{kt}{m} + \frac{1}{200}\right)} = 200e^{\frac{-kx}{m}}$$

Despejando la variable tiempo t, se obtiene la ecuación:

$$t = \frac{m}{k}\left(\frac{e^{\frac{kx}{m}} - 1}{200}\right)$$

Sustituyendo los valores de $\frac{m}{k} = -\frac{1}{10\ln(0.4)}$ y $x = 0.1m$ en la igualdad anterior, se tiene:

$$t = \frac{3}{400}\left(-\frac{1}{10\ln(0.4)}\right) = 8.185175 * 10^{-4}\ s$$

Tercera fase: Verificar

En Verificar como tercera fase de solución del problema es necesario considerar los siguientes elementos:

- Analizar la solución: ¿puede verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?, ¿puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿puede emplear el resultado o el método en algún otro problema? ¿puede obtener el resultado utilizando otro modelo matemático?

- Comparar los resultados obtenidos a partir del modelo matemático propuesto con respecto a las observaciones dadas como datos correctos del problema, con la finalidad de comprobar si el objetivo planteado se ha logrado, de no alcanzarlo, es necesario planificar de nuevo.

Aspecto cualitativo informativo

Considerando que el objetivo es determinar el tiempo de movimiento de la bala por la tabla, con el supuesto de que los datos observados y el modelo matemático propuesto son los correctos, se pretende verificar que el valor del tiempo **,** obtenido con el modelo matemático corresponde a la velocidad de salida observada.

Verificación

Con base en la segunda ley de Newton se determinó, que el modelo matemático a aplicar para resolver el problema A estaba definido por:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

Resolviendo la ecuación por el método de separación de variables,

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\ dt$$

Definiendo los límites de integración de acuerdo con los datos de tiempo y velocidad del problema $P_0=(0,200)$ y $P_1=(t,v)$, se tiene:

$$\int_{200}^{v}\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\int_{0}^{t}dt$$

Resolviendo las integrales

$$\left.\frac{-1}{v}\right|_{200}^{v} = \left.\frac{-kt}{m}\right|_{0}^{t}$$

Aplicando el TFC se tiene que:

$$\frac{1}{200}-\frac{1}{v}=-\frac{k}{m}t$$

Despejando v se obtiene la ecuación:

$$v=\frac{1}{\frac{1}{200}+\frac{k}{m}t}$$

Sustituyendo en el valor de $\frac{m}{k}=-\frac{1}{10\ln(0.4)}$ se genera la ecuación:

$$v=\frac{1}{\frac{1}{200}-10*(\ln 0.4)*t}$$

Con base en la ecuación 9) se tiene que para un tiempo $t=0\,s$, la velocidad calculada es $v_{cal}=200\ \frac{m}{s}$ y para un tiempo $t=8.185175*10^{-4}\ s$ la velocidad calculada es $v_{cal}=80.00000006\ \frac{m}{s}$, se tiene que los valores calculados de las velocidades con el modelo matemático son muy parecidos a los valores de las velocidades observadas.

Como la diferencia entre el valor observado $v_{obs}=80\ \frac{m}{s}$ y el valor calculado $v_{cal}=80.00000006\ \frac{m}{s}$ no es significativa, es decir, $|v_{obs}-v_{cal}|=6*10^{-8}\frac{m}{s}$ entonces se concluye que el modelo matemático propuesto explica eficientemente la dinámica de velocidad de la bala por la tabla.

Considerando que velocidad expresa la relación de un cambio de posición con respecto cambia el tiempo, entonces $v=\frac{dx}{dt}$ llevando esta información a la ecuación se tiene que:

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\frac{1}{200}-10*(\ln 0.4)*t}$$

Resolviendo la ecuación en términos de las variables de posición y tiempo

$$\int_0^x dx=\int_0^t\frac{dt}{\frac{1}{200}-10*(\ln 0.4)*t}$$

Se obtiene la ecuación:

$$x(t)=\frac{\ln\left|\frac{\frac{1}{200}-10*(\ln 0.4)t}{\frac{1}{200}}\right|}{-10*(\ln 0.4)}=\frac{\ln|1+2000*(\ln 2.5)t|}{10*(\ln 2.5)}$$

Con base en la ecuación 10) se tiene que para un tiempo $t=0\ s$, la posición calculada es $x_{cal}=0\ m$, y para un tiempo $t=8.185175*10^{-4}\ s$ la posición calculada es $x_{cal}=0.099999999\ m$, se tiene que los valores calculados de las posiciones de la bala en la tabla son muy parecidos a los valores de las posiciones observadas.

Como la diferencia entre el valor observado $x_{obs}=0.1m$ y el valor calculado $x_{cal}=0.099999999\ m$, no es significativa, es decir, $|x_{obs}-x_{cal}|=1*10^{-9}\ m$ entonces se concluye que el modelo matemático propuesto explica eficientemente la dinámica de posición de la bala por la tabla.

Cuarta fase: Actuar

Como se ha comprobado que las acciones emprendidas han dado el resultado esperado, es decir, se alcanzó el objetivo planteado, entonces no es necesario planificar de nuevo.

- Sí la diferencia entre los valores observados y los valores calculados con el modelo matemático propuesto hubieran sido significativos, entonces se recomienda ajustar o cambiar el modelo matemático propuesto y planificar de nuevo.

Conclusiones

Con base en la segunda ley de Newton, se generó el modelo matemático propuesto, el cual, explica eficientemente la dinámica de posición y velocidad de la bala por la tabla, implicando que el tiempo $t=8.185175*10^{-4}\ s$, como variable de interés se calcula en forma eficaz.

La modelización matemática implementada a través del ciclo de Deming permitió alcanzar el objetivo de determinar el tiempo de movimiento de la bala por la tabla. Además, resalta la integración del binomio herramientas matemáticas (modelos matemáticos) y la vida cotidiana (fenómenos), es decir, el modelo matemático propuesto explica en forma eficiente el fenómeno en estudio.

Como método de enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles de escolaridad, la modelación matemática propiciaría en el estudiante la capacidad de ser autodidacta, además de alentar su crecimiento cognoscitivo en los siguientes aspectos:

- Estar *informado*: que conozca previamente los elementos de apoyo que existen en su entorno académico (Científicos y Tecnológicos), relacionados con la disciplina que en un futuro será un experto.
- Estar *formado*: que entienda claramente los conocimientos necesarios y específicos, sobre su quehacer como profesionista, además, de la interacción de las diferentes disciplinas que dependen de las matemáticas.
- Estar *transformado*: que aplique eficazmente los conocimientos adquiridos en las etapas anteriores, a la solución de problemas específicos.

Finalmente, es necesario considerar hacer algunas interrogantes: el modelo matemático que se utiliza en el Problema A, ¿explicaría eficientemente las siguientes situaciones?

- Un cohete que atraviesa una densa capa atmosférica (aeroespacial).
- Una célula es bombardeada por electrones, protones o neutrones (ingeniería biomédica o biofísica).
- Un fotón que impacta una muestra biológica o material de algún tipo (ingeniería óptica).
- Cómo resolvería este problema en el laboratorio de ingeniería, modelando en diversos materiales similares al block de madera.

Además, el Problema A se podrá resolver mediante el ciclo de Deming y modelado con la teoría de trabajo y energía, o termodinámica y/o física-matemática como Hamilton-Jacobi.

Finalmente, para mejorar la calidad del servicio educativo hasta llegar a tener y mantener los parámetros internacionales y competitivos, mediante la modernización y aplicación de nuevas técnicas, metodologías y filosofías de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tendientes a satisfacer las necesidades del cliente, es decir: *que el cliente no sufra con mi trabajo*.

Referencias

Báez-López, D. (2012). *Matlab, con aplicaciones a la Ingeniería, Física y Finanzas*. Alfaomega.

Biembengut, M., y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática, 16*(2), 105-125. https://doi.org/10.24844/em1602.06

Bosch, M., García, F., Gascón, J., e Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática, 18*(2), 37-74. http://www.redalyc.org/pdf/405/40518203.pdf

Brito-Vallina, M., Alemán-Romero, I., Fraga-Guerra, E., Para-García, J., y Tapia, R. (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica, 14*(2), 129-139. http://www.redalyc.org/pdf/2251/225117950005.pdf

Giancoli, D. C. (2006). *Física Volumen I*. Pearson Educación.

Hahn, B., y Valentine, D. (2019). *Essential MATLAB for Engineers and Scientists*. Academic Press.

Imai, M. (1991). *KAIZEN.* CECSA.

Kiseliov, A., Krasnov, M., y Makerenko, G. (1997). *Problemas De Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. MIR, Moscú.

Leithold, L. (1996). *EL CALCULO 7*. Oxford University Press.

Moore, H. (2017). *MATLAB for Engineers*. Pearson.

Obando, R. (2023). Ciclo de Deming o PDCA: qué es y cómo llevarlo a la práctica. *Hubspot*. https://blog.hubspot.es/sales/ciclo-de-deming

Piaget, J. (1983). *A dónde va la educación*. EDITORIAL TEIDE. S. A.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas SA De CV.

Salas-Rueda, R. (2018). Uso del ciclo de Deming para asegurar la calidad en el proceso educativo sobre las Matemáticas. *Ciencia UNEMI,11*(27), 8-19. https://doi.org/10.29076/issn.2528-7737vol11iss27.2018pp8-19p

Serway, R. (2018). *Física para ciencias e ingeniería 1* (10a. ed.). Cengage Learning.

Simmons, G. (2016). *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. CRC Press.

Technologies (2021). La relación entre la Matemática Aplicada y Computación. *GINZO TECHNOLOGIES SL.* https://ginzo.tech/matematica-aplicadacomputacion

Urrelo, R. (2017, octubre). El ciclo de Deming en el proceso enseñanza-aprendizaje de nivel universitario. *Revista Jornadas de Investigación*, *9*(9), 57. https://repositorio.umaza.edu.ar/handle/00261/2239

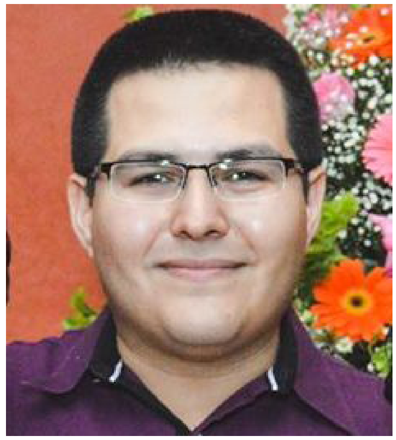
Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación matemática, 26*(1), 314-338.

Young, H., y Freedman, R. (2018). *Física universitaria: con física moderna*. Pearson Educación.

Zill, D., Wright, W., Escutia, J. y Hernández, A. (2018). *Ecuaciones diferenciales: matemáticas 5*. Cengage Learning.

Acerca del coordinador

Jesús Eduardo Hinojos Ramos



Es Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa por el Cinvestav, Maestro en Matemática Educativa e Ingeniero en Electrónica por el ITSON. Es profesor auxiliar del Departamento de Matemáticas del ITSON donde imparte asignaturas para estudiantes de pregrado y posgrado. Recibió el premio EGEL-Ceneval por desempeño de excelencia y es miembro del SNII en el nivel de Candidato y Asociado del CLAME.

Acerca de los autores

Capítulo 1. Dr. Fernando Cajas Domínguez

Es Doctor en Didáctica de la Ciencia por la Universidad Estatal de Michigan, Maestro en Matemáticas por la la Universidad de Panamá e Ingeniero por la Universidad de San Carlos de Guatemala (USAC). Es profesor de la División de Ciencias de la Ingeniería del Centro Universitario de Occidente (CUNOC) de la USAC, donde ha trabajado por 40 años, 15 de los cuales ha pasado en el extranjero, estudiando o trabajando en entidades académicas. Fundador de los programas de ingeniería del CUNOC y director del Instituto de Investigaciones de ingeniería del CUNOC, además de ser miembro fundador del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME) y del Grupo de Investigación Latinoamericano Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa (FIME).

Capítulo 2. Dr. José Ismael Arcos Quezada

Es Doctor y Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) e Ingeniero Mecánico por la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM). Profesor de Tiempo Completo del área de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería de la UAEM y ha ejercido la docencia por 47 años. Es autor de libros para la enseñanza de las Matemáticas en Escuelas de Ingeniería (Cálculo infinitesimal, Geometría Analítica y Cálculo multivariable para estudiantes de ingeniería) y de libros para formación de profesores de matemáticas (Desarrollo Conceptual del Cálculo y Desarrollo Conceptual de la Geometría). También es Miembro Fundador del Grupo FIME y de la red CIMATES.

Capítulo 3. Dr. Saúl Ernesto Cosmes Aragón

Es Doctor en Didáctica de la Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la Universidad de Sonora (UNISON) e Ingeniero Civil por el Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON). Es profesor de matemáticas para ingeniería y profesor de la Maestría en Matemática Educativa del Departamento de Matemáticas del ITSON. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores e Investigadoras (SNII) en el nivel de Candidato.

Capítulo 3. Dr. Jesús Eduardo Hinojos Ramos

Es Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa por el Cinvestav, Maestro en Matemática Educativa e Ingeniero en Electrónica por el ITSON. Es profesor auxiliar del Departamento de Matemáticas del ITSON donde imparte asignaturas para estudiantes de pregrado y posgrado. Recibió el premio EGEL-Ceneval por desempeño de excelencia y es miembro del SNII en el nivel de Candidato y Asociado del CLAME.

Capítulo 3. Dra. Diana del Carmen Torres Corrales

Es Doctora en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa por el Cinvestav, Maestra en Matemática Educativa e Ingeniera Industrial y de Sistemas por el ITSON. Es profesora auxiliar del Departamento de Matemáticas del ITSON donde imparte asignaturas para estudiantes de pregrado y posgrado. Ganadora del premio Arturo Rosenblueth a la mejor tesis de doctorado del 2020 en el área de Ciencias Sociales y Humanidades que otorga el Cinvestav y reconocida en el SNII en el nivel de Candidata y Asociada del CLAME.

Capítulo 4. Dr. Alberto Camacho-Ríos

Es Doctor y Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa por el Cinvestav y Licenciado en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Juárez. Es profesor-investigador del TecNM campus Chihuahua II, así como docente de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chihuahua. Trabajó aproximadamente 15 años como topógrafo y a raíz de ello se interesó por el estudio y enseñanza de las matemáticas. Es miembro del SNII en nivel 1 y Miembro Fundador del Grupo FIME.

Capítulo 4. Mtro. Andrés Hernández Quintana

Es Maestro en Dirección y Gestión Empresarial e Ingeniero en Sistemas Computacionales. Profesor de carrera en áreas de Ciencias Básicas y de la maestría en Sistemas Computacionales en el TecNM campus Chihuahua II. Cuenta 19 años de experiencia profesional como consultor de sistemas computacionales. Durante su formación profesional participó en los concursos de Ciencias Básicas, de los cuales surgió el interés por las ciencias exactas y su enseñanza. Es miembro activo del Cuerpo Académico "Educación Matemática y Educación" con clave ITCH-CA-2.

Capítulo 4. Mtro. Leonardo Nevárez Chávez

Es profesor-investigador del TecNM campus Chihuahua II. Imparte clases en las carreras de Ingeniería en Sistemas Computacionales e Ingeniería Informática, así como en la Maestría en Sistemas Computacionales. En esta última ha dirigido tesis del área de Educación Matemática y Computación. Además, es miembro del Cuerpo Académico Matemáticas y Computación.

Capítulo 5. Mg. Luis Fernando Plaza Gálvez

Es Magíster en Enseñanza de la Matemática e Ingeniero Electricista por la Universidad Tecnológica de Pereira. Es Profesor Investigador Asociado en la Unidad Central del Valle del Cauca, Tuluá, Colombia. Recibió la distinción del Ministerio de Ciencia y Tecnología de Colombia (Min Ciencias) en la Categoría 2: investigador asociado.

Capítulo 6. Dr. Oscar Rubén Gómez Aldama

Es Doctor en Electrónica y Telecomunicaciones por el Centro de Investigación Científica (CICESE) y de Educación Superior de Ensenada, Maestro en Ingeniería Industrial por el ITSON y

Licenciado en Matemáticas por la UNISON. Actualmente es profesor investigador de tiempo completo, Titular C, SNI Nivel I, trabaja en el Cuerpo Académico de Física y matemáticas aplicadas a la Ciencia de la Salud en la Universidad de Sonora, ha impartido cursos de matemáticas en nivel Licenciatura y Posgrado durante 40 años. Su investigación de interés es la identificación de parámetros de sistemas de parámetros distribuidos y redes neuronales artificiales.

Capítulo 6. Dr. Lamberto Castro Arce

Es Doctor en Ciencias por el Centro de Investigación en Física de la UNISON, Maestro en Ciencias por el CICESE y Licenciado en Física por la UNISON. Actualmente es Profesor Titular A de la UNISON, ha impartido cursos de Física en nivel licenciatura durante 34 años. Es Perfil PRODEP, su investigación de interés es la enseñanza de la Física en Carreras de Ciencias e Ingeniería.

Capítulo 6. M. en C. Viridiana Gómez Barrón

Es Maestra en Electrónica y Telecomunicaciones con Orientación en Telecomunicaciones por el CICESE e Ingeniera en Electrónica por el ITSON. Actualmente es profesora por tiempo indeterminado en la USON, donde ha laborado por 14 años en las áreas de trabajo académico Matemáticas y Bioestadística. Su investigación de interés es Comunicaciones Móviles Celulares.

Rompiendo Barreras:
Avances y desafíos en la enseñanza de ingeniería y matemáticas en América Latina

Se terminó de editar en Ciudad Obregón, Sonora; el 15 de marzo de 2024,
por la Oficina de Publicaciones del Instituto Tecnológico de Sonora.

Fue puesto en línea para su disposición en el sitio
www.itson.mx
en la sección de Publicaciones.

ROMPIENDO BARRERAS: Avances y desafíos en la enseñanza de ingeniería y matemáticas en América Latina

"Con un tono accesible y dirigido a la difusión, este libro se presenta como un recurso esencial para educadores, investigadores y profesionales interesados en la vanguardia de la formación matemática en ingeniería. Es una obra que se sitúa en la intersección de disciplinas, pero con un claro objetivo: la mejora continua del aprendizaje matemático para ingenieros, fundamentada en la riqueza de las experiencias compartidas y las innovaciones pedagógicas. En cada página, el lector encontrará una fuente de inspiración y un llamado a la acción para transformar la educación matemática en ingeniería, preparando así a las futuras generaciones para los retos que aguardan en un mundo cada vez más tecnificado."

Dr. Mauricio Gabriel Orozco del Castillo

ITSON® UNIVERSIDAD