

Regulación no lineal de la salida basada en modelos Takagi-Sugeno

Estrada M. Víctor, Castillo T. Bernardino y Bernal R. Miguel A.

Nonlinear output regulation based on Takagi-Sugeno models

Abstract— Tracking a signal is one of the most important issues in control theory and the output regulation theory is a useful tool. In fact, it is difficult to solve because a set of partial differential equations appears in the nonlinear case. Then, Takagi-Sugeno models are introduced in order to simplify the procedure. This paper shows a systematic approach based on Takagi-Sugeno models and linear matrix inequalities that solve the nonlinear output regulation problem by taking advantage of convex representations for the nonlinear mappings and the time-derivatives of the membership functions, one of the principal contributions that makes it different from previous results. In addition, it is fully based on element-wise linear matrix inequalities which are numerically solvable by convex-optimization methods.

Keywords— Linear Matrix Inequality, Output Regulation Theory, Takagi-Sugeno Models, Trajectory Tracking.

Resumen— El seguimiento de trayectoria es uno de los principales problemas en la teoría de control y la teoría de regulación de la salida es una herramienta muy útil. Sin embargo, resulta difícil resolverlo porque aparecen un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales en el caso no lineal. Los modelos Takagi-Sugeno han sido introducidos para simplificar el procedimiento. Este artículo muestra un enfoque sistemático basado en modelos Takagi-Sugeno y desigualdades matriciales lineales que solucionan el problema de regulación no lineal de la salida tomando ventaja de las representaciones convexas de los mapeos no lineales y las derivadas de las funciones de membresía, una de las principales contribuciones que lo hacen distinto de trabajos anteriores. Además, está basado en desigualdades matriciales lineales elemento por elemento que pueden ser resueltas numéricamente por métodos de

Manuscrito recibido el 13 de marzo de 2012. Este trabajo fue respaldado por el departamento de Ing. Eléctrica y Electrónica del Instituto Tecnológico de Sonora a través del proyecto PROFAPI 1A4005208007 y el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por medio de la becas 24176, SIN-37449 y proyecto SEP-CONACYT CB-2011, 168406.

Estrada M. Víctor. es estudiante de maestría en ciencias en ingeniería eléctrica del CINVESTAV del IPN; Av. del Bosque 1145, Col. El Bajío; Zapopan, Jalisco, México; C.P. 45019; Tel: (33) 3777-3600, ext. 1075; e-mail victor.estrada.m@gmail.com.

Castillo T. Bernardino es integrante del Departamento de Ingeniería Eléctrica y Ciencias de la Computación del CINVESTAV del IPN; Av. del Bosque 1145, Col. El Bajío; Zapopan, Jalisco, México; C.P. 45019; Tel: (33) 3777-3600, e-mail toledo@gdl.cinvestav.mx.

Bernal R. Miguel A. del 2011 hasta la fecha se ha de desempeñado como profesor de tiempo completo del Instituto Tecnológico de Sonora en el Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica del Instituto Tecnológico de Sonora; Av. Antonio Caso S/N Col. Villa ITSON; Ciudad Obregón, Sonora, México; C.P. 85130; Tel: (644) 4109000, ext. 1200; Fax: (644) 4109001. e-mail miguel.bernal@itson.edu.mx.

punto-interior.

Palabras clave—Desigualdad Matricial Lineal, Modelo Takagi-Sugeno, Seguimiento de Trayectoria, Teoría de Regulación de la Salida.

I. INTRODUCCIÓN

El seguimiento de una señal es importante en sistemas de control. Existen varias técnicas para lograr tal objetivo, una de ellas es la teoría de regulación, que se basa en técnicas de control en el marco de la geometría diferencial. La teoría de regulación ha sido tratada tanto para sistemas lineales [1] como para no lineales [2, 3, 4].

Esencialmente, el problema de regulación consiste en someter una planta a señales de referencia y/o perturbaciones externas, generadas por un sistema llamado exosistema. Existe solución al problema si es posible encontrar una ley de control tal que en ausencia de perturbaciones el punto de equilibrio de la planta en lazo cerrado sea asintóticamente estable y, además, el error de seguimiento entre la salida de la planta y la señal de referencia tienda a cero asintóticamente [5]. Existen dos casos: a) información completa de los estados, llamada regulación por retroalimentación del estado; b) cuando sólo se tiene información del error de seguimiento, entonces se utiliza regulación por retroalimentación del error [2, 6].

Para el caso lineal, es suficiente y necesario resolver un par de ecuaciones matriciales lineales, llamadas ecuaciones de Francis [1]. La extensión para sistemas no lineales, está basada en la teoría de la variedad central [7] y su solución se consigue al resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales conocidas como ecuaciones de Francis-Isidori-Byrnes (FIB) [2].

Trabajar con las ecuaciones FIB, resulta en la mayoría de los casos muy complicado. Para tratar de simplificar el procedimiento se ha trabajado en el marco de sistemas lineales [3, 4, 8, 9]. En años recientes, el modelado en la forma Takagi-Sugeno (TS) y el uso de desigualdades matriciales lineales (LMIs, por sus siglas en inglés) ha sido utilizado para enfrentar las dificultades mencionadas anteriormente [10, 11, 12].

En este trabajo se busca la solución sistemática y completa para el problema de regulación no lineal de la salida (PRNS) por retroalimentación, tanto del estado como del error, a través modelos TS [13] y LMIs. Para esto se asume una estructura TS de las ecuaciones FIB, mismas que originan derivadas de las funciones de membresía que generan inconvenientes [11, 12]. Dificultades similares se presentan en el área de estabilización

por medio de una función no cuadrática de Lyapunov para sistemas en forma TS, las primeras investigaciones [14, 15, 16] solo dan una aproximación. En [17] se presentó por primera vez un análisis completo que toma ventaja de esas derivadas de funciones de membresía (FMs). Este análisis es incluido en las ecuaciones FIB y permite resolver el PRNS por medio de modelos TS y LMIs.

El presente artículo está ordenado como sigue: la sección II muestra el PRNS y notación para modelos TS; la sección III contiene los resultados principales en donde se desarrolla el análisis de las derivadas de FMs para solucionar el problema del regulador difuso; un par de ejemplos son mostrados en la sección IV para verificar la efectividad del enfoque; finalmente, en la sección V se muestran las conclusiones.

II. TEORÍA BÁSICA Y NOTACIÓN

A. Regulación de la salida por retroalimentación del estado

Considere el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u + p(x)w \\ \dot{w}(t) &= s(w) \\ e(t) &= h(x) + q(w)\end{aligned}\quad (1)$$

donde $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es la entrada del sistema, $w(t) \in W \subset \mathbb{R}^{q \times 1}$ el exosistema y $e(t) \in \mathbb{R}^{o \times 1}$ es el error de seguimiento.

El PRNS por retroalimentación del estado consiste en encontrar una ley de control $u(t) = \alpha(x, w)$ tal que:

- A) $\dot{x}(t) = f(x) + g(x)\alpha(x, 0)$ tenga el punto de equilibrio $x = 0$ exponencialmente estable con $\alpha(x, 0) = K^*x$, $K^* \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- B) $\exists U \subset X \times W \supset (0, 0) : \forall (x(0), w(0)) \in U \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

En [5] se proponen las siguientes hipótesis:

H1) $w = 0$ es un punto de equilibrio estable del exosistema y $\exists \tilde{W} \subset W \supset 0 : \forall w(0) \in \tilde{W}$ es Poisson-estable.

H2) $(f(x), g(x))$ tiene una aproximación lineal estabilizable en $x = 0$.

Si se cumplen H1 y H2, el PRNS por retroalimentación del estado tiene solución si y sólo si $\exists x = \pi(w)$, $u = \gamma(w)$: $\pi(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$ como mapeos en $W^0 \subset W \supset 0$ tales que [5]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w)) + g(\pi(w))\gamma(w) + p(\pi(w))w \\ 0 &= h(\pi(w)) + q(w).\end{aligned}\quad (2)$$

La ley de control está dada por

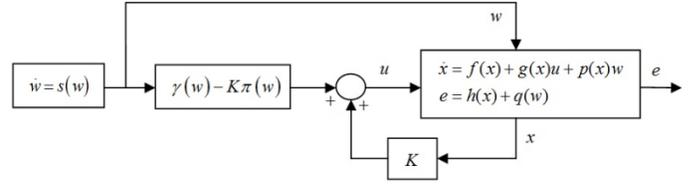


Fig. 1 Diagrama del sistema en lazo cerrado con retroalimentación de estado.

$$u(t) = \alpha(x, w) = \gamma(w) + K^*(x - \pi(w)) \quad (3)$$

La figura 1 muestra un diagrama a bloques del esquema de control por retroalimentación de estado.

B. Regulación de la salida por retroalimentación del error

En caso de que no se tenga acceso a todos los estados, es necesario hacer un estimado de las variables utilizando la información disponible, la del error. En consecuencia el problema de regulación debe resolverse a través de retroalimentación del error. Para esto considere el sistema no lineal (1), el PRNS por retroalimentación del error consiste en encontrar una ley de control

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \eta(\xi, e) \\ u(t) &= \theta(\xi)\end{aligned}\quad (4)$$

donde $\xi(t) \in \Xi \subset \mathbb{R}^{(n+q) \times 1}$, además $\xi(t) = [\xi_0 \quad \xi_1]^T$ tales que:

C) $\dot{x}(t) = f(x) + g(x)\theta(\xi)$ y $\dot{\xi}(t) = \eta(\xi, h(x))$ tengan un punto de equilibrio $(x, \xi) = (0, 0)$ asintóticamente estable.

D) $\exists U \subset X \times \Xi \times W \supset (0, 0, 0)$ y $\forall (x(0), \xi(0), w(0)) \in U$ para que el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x) + g(x)\theta(\xi) + p(x)w \\ \dot{\xi}(t) &= \eta(\xi, h(x) + q(w)) \\ \dot{w}(t) &= s(w)\end{aligned}\quad (5)$$

cumpla que el $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

Además de las hipótesis H1 y H2, es necesario considerar una tercera:

$$\text{H3) } \left(\begin{bmatrix} f(x) + p(x)w \\ s(x) \end{bmatrix}, h(x) + q(w) \right) \text{ es un par detectable}$$

en la aproximación lineal $(x, w) = (0, 0)$.

En caso de cumplirse H1, H2 y H3 el PRNS por retroalimentación del error tiene solución si y sólo si $\exists x = \pi(w)$, $u = \gamma(w)$: $\pi(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$ como mapeos en $W^0 \subset W \supset 0$ tales que las ecuaciones en (2) se cumplan.

La ley de control está dada por

$$u(t) = \theta(\xi) = \gamma(\xi_1) + K^* (\xi_0 - \pi(\xi_1)) \quad (6)$$

C. Modelado Takagi-Sugeno (TS) y LMIs

A continuación se definirá el modelo de la forma TS [18] por medio del enfoque sector no lineal [13], que es una representación exacta del modelo no lineal, es decir, una reescritura del mismo. Con esto se busca poder resolver ambos problemas de regulación no lineal de la salida por medio de LMIs. Suponga que (1) tiene p no-linealidades acotadas $nl_j(\cdot) \in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j]$, $j \in \{1, \dots, p\}$ en una región compacta $\Delta \subset X \times W$ incluyendo el origen. Sea $z(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ el vector de premisas en el cual las no-linealidades son expresadas (acotadas en una región compacta $\Delta \ni 0$, posiblemente dependiendo de x y w). Las no-linealidades descritas anteriormente son capturadas en los siguientes pesos

$$\omega_0^j(\cdot) = \frac{nl_j(\cdot) - \underline{nl}_j}{\overline{nl}_j - \underline{nl}_j}, \quad \omega_1^j(\cdot) = 1 - \omega_0^j(\cdot), \quad (7)$$

$j \in \{1, \dots, p\}$, con los cuales se construyen las funciones de membresía (FMs) para $i \in \{1, \dots, 2^p\}$, $i_j \in \{0, 1\}$:

$$h_i = h_{1+i_1+2i_2+\dots+i_p \times 2^{p-1}} = \prod_{j=1}^p \omega_{i_j}^j(z_j) \quad (8)$$

Las FMs tienen la propiedad de suma convexa $\sum_{i=1}^r h_i(\cdot) = 1$, $h_i(\cdot) \geq 0$ en Δ . Estas sumas, por simplicidad, se escribirán como $\Upsilon_z = \sum_{i=1}^r h_i \Upsilon_i$. Otras expresiones como la derivada de la suma convexa $\dot{\Upsilon}_z = \sum_{i=1}^r \dot{h}_i \Upsilon_i$ y la doble suma $\Upsilon_{zz} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij}$ aparecerán a lo largo del trabajo.

Además, el símbolo $<(>)$ representa menor que (mayor que) elemento a elemento en expresiones relacionadas con matrices. También, $<(>)$ se usarán como definido negativo (positivo) en expresiones matriciales.

Lema de Relajación [19]: Sea Υ_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, r\}$ una colección de matrices de tamaño adecuado. La doble suma convexa $\Upsilon_{zz} < 0$ es garantizada se cumple si lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \\ \frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii} + \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, i \neq j. \end{aligned} \quad (9)$$

D. Regulador Difuso

La representación exacta de (1) en Δ es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i w(t)) \\ &= A_z x(t) + B_z u(t) + E_z w(t), \\ \dot{w}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) S_i w(t) \\ &= S_z w(t), \\ e(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (C_i x(t) - Q_i w(t)) \\ &= C_z x(t) - Q_z w(t) \end{aligned} \quad (10)$$

con $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{o \times n}$, $E_i \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{o \times q}$, $S_i \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $i = 1, \dots, r$, matrices de tamaño apropiado derivadas del enfoque de sector no lineal con $r = 2^p \in \mathbb{N}$ el número de reglas.

En las siguientes expresiones, el argumento del tiempo será omitido donde sea conveniente.

Ahora, el PRNS tiene solución si y sólo si

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\pi}(w) \\ 0 \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left(\begin{bmatrix} A_i & E_i \\ C_i & -Q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi(w) \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} \gamma(w) \right) \\ &= \begin{bmatrix} A_z & E_z \\ C_z & -Q_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi(w) \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_z \\ 0 \end{bmatrix} \gamma(w) \end{aligned} \quad (11)$$

satisface los mapeos no lineales $x = \pi(w)$ y $u = \gamma(w)$. La expresión (11) es equivalente a las ecuaciones FIB (2).

En [11, 12] se asume una estructura de suma convexa para los mapeos no lineales

$$\begin{aligned} \pi(w(t)) &= \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) \Pi_j w(t) = \Pi_z w(t) \\ \gamma(w(t)) &= \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) \Gamma_j w(t) = \Gamma_z w(t) \end{aligned} \quad (12)$$

con $\Pi_j \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\Gamma_j \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $j \in \{1, \dots, r\}$. Y la reescritura de las leyes de control (3) y (6):

$$u(t) = \alpha(x, w) = \Gamma_z w + K_z (x - \Pi_z w) \quad (13)$$

En Teoría de Regulación la ganancia de estabilización K^* normalmente se diseña primero. En la literatura existen diversos trabajos que solventan este paso. Aquí se adoptará el enfoque Compensador Paralelo Distribuido, en donde $K^* = K_z$.

En caso de no tener toda la información completa, ya sea que alguno de los estados x o del exosistema w no estén disponibles, es necesario resolver el PRNS por retroalimentación del error. Reescribiendo (4) en la región Δ queda

$$\begin{aligned}\xi(t) &= F_z \xi + G_z e \\ u(t) &= H_z \xi\end{aligned}\quad (14)$$

con $F_i \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$, $H_i \in \mathbb{R}^{1 \times (n+q)}$, $i \in \{1, \dots, r\}$, $G_z \in \mathbb{R}^{(n+q) \times 1}$ definidos como sigue

$$F_z = \begin{bmatrix} A_z - G_z^0 C_z + B_z K_z & E_z + G_z^0 Q_z + B_z (\Gamma_z - K_z \Pi_z) \\ -G_z^1 C_z & S_z + G_z^1 Q_z \end{bmatrix},$$

$$G_z = \begin{bmatrix} G_z^0 \\ G_z^1 \end{bmatrix} \text{ y } H_z = [K_z \quad \Gamma_z - K_z \Pi_z]. \text{ La ganancia } G_z \text{ es}$$

diseñada para que los pares $\left(\begin{bmatrix} A_z & E_z \\ 0 & S_z \end{bmatrix}^T, [C_z \quad -Q_z]^T \right)$ sean asintóticamente estables por medio del enfoque Compensador Paralelo Distribuido. Finalmente la ley de control tiene la forma

$$u(t) = \theta(\xi) = \Gamma_z \xi_1 + K_z (\xi_0 - \Pi_z \xi_1) \quad (15)$$

En la siguiente sección, la representación exacta TS del sistema no lineal permitirá trabajar con las ecuaciones FIB para resolverlas con técnicas de optimización convexa, es decir, en términos LMI. Resultados presentados anteriormente [11, 12, 16] quedarán como casos particulares de este nuevo enfoque.

III. RESULTADO PRINCIPAL

El siguiente teorema proporciona elementos para resolver el PRNS por medio de LMIs.

Teorema 1 [20]: Sean $L, R: \mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}^{b \times c}$ matrices lineales continuamente diferenciables funciones de un vector de decisión $x \in \mathbb{R}^a$. Si existe solución única $\bar{x} \in \mathbb{R}^a$ para el problema $L(x) = R(x)$, ésta solución es aproximada con una precisión arbitraria por el problema de minimización LMI elemento por elemento:

$$\min \varepsilon > 0 : -\varepsilon < L(x) - R(x) < \varepsilon.$$

Demostración: De $L(x) = R(x)$ se sigue que $L(\bar{x}) - R(\bar{x}) = \mathbf{0}$ con $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{b \times c}$. Por continuidad y unicidad de la solución \bar{x} , esto implica que $\forall \varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, $\exists \delta > 0 : |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |L(x) - R(x)| < \varepsilon$ con ε arbitrariamente pequeño. Esto lleva directamente a la deseada expresión LMI. \square

Sustituyendo (12) en (11) permite reescribir las ecuaciones FIB como sigue:

$$\begin{bmatrix} \Pi_z \dot{w} + \dot{\Pi}_z w \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z & E_z \\ C_z & -Q_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_z w \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_z \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma_z w \quad (16)$$

En resultados anteriores [11, 12] el problema de la derivada de las funciones de membresía que aparecen en $\dot{\Pi}_z$ no se

considera por se asume $\dot{\Pi}_z = 0$, es decir, $\Pi_j = \Pi$, $\forall j \in \{1, \dots, r\}$. También se consideran cotas que no son conocidas a priori. En [17, 21] se presenta una manera de tomar ventaja de la información que proporcionan las derivadas de las FMs en otro contexto; pero que mantiene propiedades LMI para ser solucionadas por medio de técnicas de optimización convexa [22, 23]. Los resultados presentados en el siguiente teorema utilizan estas ideas, con lo cual se abre la posibilidad de no despreciar a priori el término $\dot{\Pi}_z$.

Teorema 2: Suponga que H1 y H2 se cumplen, entonces el PRNS por retroalimentación del estado tiene solución si $\exists X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\Pi_j \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\Gamma_j \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $j \in \{1, \dots, r\}$, $\beta_k > 0$, $k \in \{1, \dots, p\}$, y un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño tales que:

$$\begin{aligned} X > 0, \quad A_z X + B_z M_z + X A_z^T + M_z^T B_z^T < 0, \\ -\varepsilon < \begin{bmatrix} A_z \Pi_z + E_z + B_z \Gamma_z - \Pi_z S_z \\ -\sum_{k=1}^p (-1)^{d_k^\alpha} \beta_k (\Pi_{g_1(z,k)} - \Pi_{g_2(z,k)}) \\ C_z \Pi_z - Q_z \\ |\dot{\omega}_0^k| \leq \beta_k \end{bmatrix} < \varepsilon, \quad (17) \end{aligned}$$

con $g_1(j, k) = \lfloor (j-1) / 2^{p+1-k} \rfloor \times 2^{p+1-k} + 1 + (j-1) \bmod 2^{p-k}$, $g_2(j, k) = g_1(j, k) + 2^{p-k}$, $\lfloor \cdot \rfloor$ la función *floor* y d_k^α obtenido de $\alpha - 1 = d_p^\alpha + d_{p-1}^\alpha \times 2 + \dots + d_1^\alpha \times 2^{p-1}$, $\alpha \in \{1, \dots, 2^p\}$. La ley de control viene dada por (13) en donde $K_z = M_z X^{-1}$.

Demostración: Con el primer conjunto de expresiones se encuentra la ganancia de estabilización K_z a través de una función candidata de Lyapunov $V = x^T P x \geq 0$, $P = P^T > 0$ y una la ley de control $u = K_z x$ (sin perturbaciones w) se tiene el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T P \dot{x} + \dot{x} P x^T \\ &= x^T \left(P(A_z + B_z K_z) + (A_z^T + K_z^T B_z^T) P \right) x < 0 \\ &\Leftrightarrow P(A_z + B_z K_z) + (A_z^T + K_z^T B_z^T) P < 0 \\ &\Leftrightarrow A_z X + B_z M_z + X A_z^T + M_z^T B_z^T < 0 \end{aligned}$$

con $X = P^{-1}$ y $M_z = K_z P^{-1}$. Para la segunda parte de (17), se puede ver que las ecuaciones FIB en (16) pueden reescribirse, después de sustituir \dot{w} y simplificar los términos comunes:

$$\begin{bmatrix} \Pi_z S_z + \dot{\Pi}_z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z \Pi_z + E_z + B_z \Gamma_z \\ C_z \Pi_z - Q_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

En [17] se probó que

$$\dot{\Pi}_z = \sum_{k=1}^p \dot{\omega}_0^k \left(\Pi_{g_1(z,k)} - \Pi_{g_2(z,k)} \right) \quad (19)$$

con $g_1(j,k)$ y $g_2(j,k)$ como ya se definieron anteriormente. Reemplazando (19) en (18) resulta:

$$\begin{bmatrix} A_z \Pi_z + E_z + B_z \Gamma_z - \Pi_z S_z \\ - \sum_{k=1}^p \dot{\omega}_0^k \left(\Pi_{g_1(z,k)} - \Pi_{g_2(z,k)} \right) \\ C_z \Pi_z - Q_z \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

A partir del Teorema 1 se tienen condiciones suficientes para la ecuación matricial (20) se puede aproximar mediante el problema de minimización sobre un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, resulta la siguiente expresión:

$$-\varepsilon < \begin{bmatrix} A_z \Pi_z + E_z + B_z \Gamma_z - \Pi_z S_z \\ - \sum_{k=1}^p \dot{\omega}_0^k \left(\Pi_{g_1(z,k)} - \Pi_{g_2(z,k)} \right) \\ C_z \Pi_z - Q_z \end{bmatrix} < \varepsilon \quad (21)$$

Si $|\dot{\omega}_0^k| \leq \beta_k$ para $\beta_k > 0$, entonces (21) resulta en (17) utilizando la propiedad $Y + \dot{\omega}_0^k Z < 0$ si $Y \pm \beta_k \times Z < 0$. □

Teorema 3: Suponga que H1, H2 y H3 se satisfacen, entonces el PRNS por retroalimentación del error tiene solución si $\exists X_1 = X_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_2 = X_2^T \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$, $M_{1j} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $M_{2j} \in \mathbb{R}^{m \times (n+q)}$, $\Pi_j \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\Gamma_j \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $j \in \{1, \dots, r\}$, $\beta_k > 0$, $k \in \{1, \dots, p\}$, y un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño tales que (17) y

$$\begin{aligned} X_1 > 0, \quad A_z X_1 + B_z M_{1z} + X_1 A_z^T + M_{1z}^T B_z^T < 0, \\ X_2 > 0, \quad \bar{A}_z X_2 - \bar{B}_z M_{2z} + X_2 \bar{A}_z^T - M_{2z}^T \bar{B}_z^T < 0, \\ -\varepsilon < \begin{bmatrix} A_z \Pi_z + E_z + B_z \Gamma_z - \Pi_z S_z \\ - \sum_{k=1}^p (-1)^{d_k^\alpha} \beta_k \left(\Pi_{g_1(z,k)} - \Pi_{g_2(z,k)} \right) \\ C_z \Pi_z - Q_z \end{bmatrix} < \varepsilon, \quad (22) \\ |\dot{\omega}_0^k| \leq \beta_k \end{aligned}$$

con $g_1(j,k) = \lfloor (j-1) / 2^{p+1-k} \rfloor \times 2^{p+1-k} + 1 + (j-1) \bmod 2^{p-k}$, $g_2(j,k) = g_1(j,k) + 2^{p-k}$, $\lfloor \cdot \rfloor$ la función *floor* y d_k^α obtenido de $\alpha - 1 = d_p^\alpha + d_{p-1}^\alpha \times 2 + \dots + d_1^\alpha \times 2^{p-1}$, $\alpha \in \{1, \dots, 2^p\}$. La ley de control obtenida de (14) con $K_z = M_{1z} X_1^{-1}$ y $G_z = (M_{2z} X_2^{-1})^T$.

Demostración: Al igual que en el teorema previo, se utiliza el una Función Candidata de Lyapunov para estabilizar los pares

$$(A_z, B_z) \text{ y } (\bar{A}_z, \bar{B}_z) \text{ con } \bar{A}_z = \begin{bmatrix} A_z & E_z \\ 0 & S_z \end{bmatrix}^T \text{ y } \bar{B}_z = [C_z \quad -Q_z]^T.$$

El resto de la demostración es idéntico al del teorema 2. □
Observación 1: Para resolver el PRNS las condiciones planteadas en cada teorema se resuelven simultáneamente, proporcionando un enfoque sistemático y gracias a las técnicas de optimización convexa.

Observación 2: Para obtener expresiones LMI de (17) y (22) hace falta aplicar el Lema de Relajación presentado anteriormente para quitar las sumas dobles implicadas haciendo una correcta selección de Y_{zz} . En [24, 25] se muestran más relajaciones que igualmente pueden aplicarse.

Observación 3: Existen diferentes opciones para el diseño de K^* : a) una ganancia común $K^* = K$ que estabiliza el par $(f(x), g(x))$ en $x = 0$; b) el enfoque del Compensador Paralelo Distribuido [11, 12, 13] en donde $K^* = K_z$ y una función cuadrática de Lyapunov $V = x^T P x$; c) Control Difuso No Cuadrático [12, 13, 17] con $K^* = K_z P_z^{-1}$ y una función difusa de Lyapunov $V = x^T P_z^{-1} x$. Las mismas opciones son válidas para la ganancia G^* del observador.

Observación 4: Las LMIs obtenidas de los teoremas 2 y 3, puede ser resueltas como un problema de minimización convexa sobre ε ; además, esto representa una cota de cada elemento del error en estado estable $e_{ss} = C_z \Pi_z - Q_z$, como se puede ver de las expresiones (17) y (22), si el mapeo $x = \Pi_z w$ es alcanzado con suficiente precisión.

Observación 5: La cota sobre $\dot{\omega}_0^k$ es verificable a posteriori por medio de la simulación del sistema en lazo cerrado.

Observación 6: Para PRNS por retroalimentación del error se asume que el vector de premisas no puede depender de estados estimados (Caso 1, en [13]).

IV. EJEMPLOS

El primer ejemplo resuelve el PRNS cuando se tiene toda la información, es decir, a través de una retroalimentación del estado, resultando Π_i iguales. En el segundo, no se cuenta con toda la información, entonces se soluciona el PRNS por retroalimentación del error, donde $\dot{\Pi}_z \neq 0$ y es importante una elección correcta $|\dot{\omega}_0^k| \leq \beta_k$.

Ejemplo 1: Sea el siguiente sistema no lineal:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & x_2^2 \\ 0.76 & 0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0.5x_1^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w(t), \quad (23)$$

con $x = [x_1 \quad x_2]^T$ como vector de estado y $w = [w_1 \quad w_2]^T$ el vector del exosistema que proporcionará las referencias a seguir y perturbaciones a rechazar, cuya dinámica es

$$\dot{w}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} w(t) \quad (24)$$

Las premisas son $z_1 = x_1$ y $z_2 = x_2$, entonces el siguiente modelo TS representa exactamente a (23) y (24) en la región $\Delta = \{|x_i| \leq 1, |w_i| \leq 1\} \supset \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i w(t)) \\ \dot{w}(t) &= \sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) S_i w(t), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{con } A_1 = A_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.76 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.76 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ S_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, 4, \quad E_1 = E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_2 = E_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_0^1 = x_2^2, \quad \omega_0^2 = x_1^2, \quad \omega_1^1 = 1 - \omega_0^1, \quad \omega_1^2 = 1 - \omega_0^2, \\ h_1 &= \omega_0^1 \omega_0^2, \quad h_2 = \omega_0^1 \omega_1^2, \quad h_3 = \omega_1^1 \omega_0^2 \text{ y } h_4 = \omega_1^1 \omega_1^2. \end{aligned}$$

La salida del sistema es $y = x_1$ y se requiere seguir a w_1 , entonces $C_i = [1 \ 0]$, $Q_i = [1 \ 0]$, $i=1, \dots, 4$. Al aplicar el Teorema 2 y el Lema de Relajación sobre las sumas dobles, las ganancias estabilizadoras resultantes son $K_1 = K_2 = [-1.4259 \ -5.6353]$, $K_3 = K_4 = [-1.4259 \ -4.6353]$. Las cotas $\beta_k = 1 \times 10^8$, $k=1, 2$ son verificadas a posteriori para cumplir $|\dot{\omega}_0^k| \leq \beta_k$ y elegidas tan grandes como se pueda. Los mapeos difusos obtenidos son $\Pi_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.304 & -0.608 \end{bmatrix}$, $i=1, \dots, 4$, $\Gamma_1 = [1.304 \ 1.108]$, $\Gamma_2 = [1.304 \ 1.608]$, $\Gamma_3 = [1 \ 0.5]$ y $\Gamma_4 = [1 \ 1]$.

En este caso, tenemos Π_i iguales, por lo tanto la elección de β_k no juega un papel fundamental, ya que el término de (17) $-\sum_{k=1}^p (-1)^{d_k} \beta_k (\Pi_{g_1(z,k)} - \Pi_{g_2(z,k)})$ se ve claramente que es igual a cero al tener Π_i idénticas.

Los resultados en simulación muestran seguimiento exacto de la salida hacia su referencia (ver figura 2) para las condiciones iniciales $x(0) = [0.4 \ 0.1]^T$ y $w(0) = [-0.8 \ 0]^T$. Además puede verse que $\dot{\Pi}_z = 0$ debido a que $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Pi_4$.

Ejemplo 2: Sea el modelo no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0.3 + 0.027x_1^2 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4x_2^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.3x_2^2 \end{bmatrix} w(t) \end{aligned} \quad (26)$$

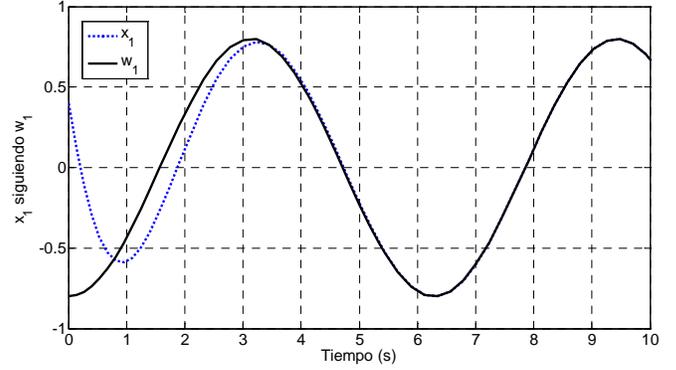


Fig. 2 x_1 siguiendo referencia de w_1 en ejemplo 1.

con $x = [x_1 \ x_2]^T$ como vector de estado y $w = [w_1 \ w_2]^T$ el vector del exosistema referencias y/o perturbaciones generadas por

$$\dot{w}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} w(t) \quad (27)$$

El vector de premisas está formado por $z_1 = x_1$ y $z_2 = x_2$, entonces el modelo TS (representación exacta) de (26) y (27) en $\Delta = \{|x_i| \leq 1, |w_i| \leq 1\} \supset \mathbf{0}$ es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i w(t)) \\ \dot{w}(t) &= \sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) S_i w(t), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{con } A_1 &= \begin{bmatrix} 0.327 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.327 & 0.9 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}, \\ A_4 &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.9 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, 4, \\ E_1 = E_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad E_2 = E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_0^1 = x_1^2, \quad \omega_0^2 = x_2^2, \\ \omega_1^1 &= 1 - \omega_0^1, \quad \omega_1^2 = 1 - \omega_0^2, \quad h_1 = \omega_0^1 \omega_0^2, \quad h_2 = \omega_0^1 \omega_1^2, \quad h_3 = \omega_1^1 \omega_0^2 \text{ y } \\ h_4 &= \omega_1^1 \omega_1^2. \end{aligned}$$

Teniendo $y = x_1$ y a $y_{ref} = w_1$, entonces $C_i = [1 \ 0]$, $Q_i = [1 \ 0]$, $i=1, \dots, 4$. Aplicando a (22) el Lema de Relajación las ganancias resultantes son: $K_1 = \begin{bmatrix} -2.3578 \\ -1.6417 \end{bmatrix}^T$,

$$K_2 = \begin{bmatrix} -2.3578 \\ -1.2417 \end{bmatrix}^T, \quad K_3 = \begin{bmatrix} -2.3893 \\ -1.6570 \end{bmatrix}^T, \quad K_4 = \begin{bmatrix} -2.3893 \\ -1.2570 \end{bmatrix}^T,$$

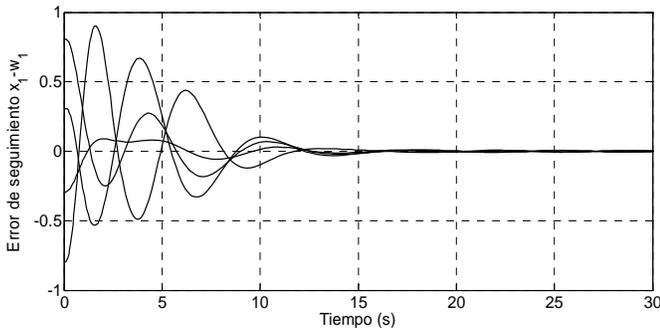


Fig.3 Error de seguimiento x_1-w_1 en ejemplo 2.

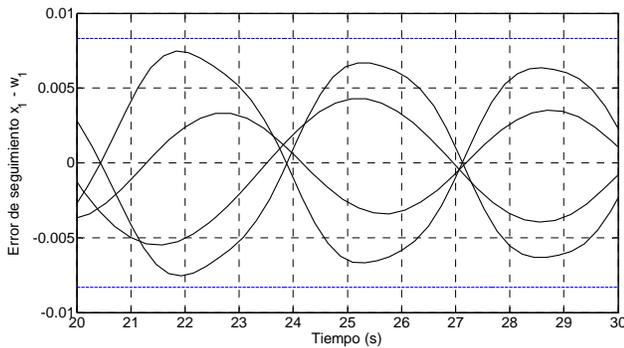


Fig.4 Vista aumentada del error de seguimiento en estado estable en ejemplo 2.

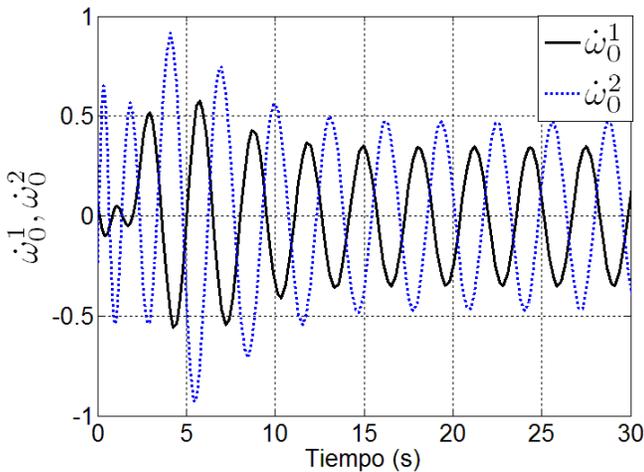


Fig.5 Verificación de las cotas β_k en el ejemplo 2.

$$G_1 = \begin{bmatrix} 10.9143 \\ 13.3953 \\ 5.0924 \\ -1.3855 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 10.8429 \\ 13.2989 \\ 5.0963 \\ -1.3832 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} 10.7302 \\ 13.2045 \\ 5.0082 \\ -1.3699 \end{bmatrix} \text{ y } G_4 = \begin{bmatrix} 10.6588 \\ 13.1081 \\ 4.9720 \\ -1.3676 \end{bmatrix}.$$

Las cotas propuestas sobre $\dot{\omega}_0^k$ son $\beta_1 = 1.5$ y $\beta_2 = 5$ son verificadas en simulación. Tras el cálculo se comprueba que no hay seguimiento exacto y que $\varepsilon = 0.0083$ es el valor mínimo de ε y será la cota del error en estado estable.

Los mapeos calculados son: $\Pi_1 = \Pi_2 \begin{bmatrix} 0.9937 & -0.0026 \\ -0.3489 & 1.1050 \end{bmatrix}$,

$$\Pi_3 = \Pi_4 \begin{bmatrix} 0.9937 & 0.0029 \\ -0.3436 & 1.1031 \end{bmatrix}, \Gamma_1 = \begin{bmatrix} -1.2640 \\ -1.0900 \end{bmatrix}^T, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} -1.4027 \\ -0.3483 \end{bmatrix}^T,$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} -1.2634 \\ -1.0859 \end{bmatrix}^T \text{ y } \Gamma_4 = \begin{bmatrix} -1.4016 \\ -0.3444 \end{bmatrix}^T.$$

Observe que, para este caso aparece $\dot{\Pi}_z \neq 0$ además de que el $\varepsilon_{ss} \leq \varepsilon = 0.0083$ corresponde a la cota del error de seguimiento en estado estable. La figura 3 muestra la simulación de los resultados obtenidos para varias condiciones iniciales, una vista más cercana del error en estado estable se tiene en la figura 4, en donde las líneas punteadas representan la cota ε y en líneas continuas el valor del error en estado estable para distintas condiciones iniciales. Finalmente, la figura 5 ilustra que $\dot{\omega}_0^k$ cumple con las cotas previamente definidas para las condiciones iniciales $x(0) = [0.1 \ 0.1]^T$, $w(0) = [-0.6 \ 0]^T$ y $\xi(0) = [0.4 \ 0.1 \ -0.3 \ 0]^T$.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado condiciones para resolver el problema de regulación difusa. En él se muestra un nuevo método que está completamente basado en LMIs y modelos TS. La principal novedad de este trabajo es la inclusión de las derivadas de las funciones de membresía que aparecen debido a las ecuaciones FIB y a las representaciones convexas de los mapeos, además el PRNS es resuelto de manera sistemática a través de métodos de optimización convexa implementados en software disponible comercialmente. Al tomar en cuenta las derivadas de las FMs, este enfoque engloba resultados anteriores, dejándolos como casos particulares. Con los ejemplos mostrados, se prueba la efectividad del enfoque propuesto. Como trabajo a futuro se plantea investigar la manera de garantizar las cotas sobre las derivadas de las funciones de membresía a priori para el Teorema 2 así como reducir las limitaciones mostradas en el modelado de los mapeos no lineales.

REFERENCIAS

- [1] B. A. Francis, "The linear multivariable regulator problem", SIAM Journal of Control and Optimization, Vol. 15, pp. 486-505, 1977.
- [2] A. Isidori, "Nonlinear control systems", Springer, Berlin, 1995.
- [3] J. Huang, W.J. Rugh, "On the nonlinear multivariable servomechanism problem", Automatica, Vol. 26, pp. 963-972, 1990.
- [4] C. I. Byrnes, F. Delli Priscoli and A. Isidori, "Output regulation of uncertain nonlinear systems", Birkhäuser, Boston, 1997.
- [5] A. Isidori, C.I. Byrnes, "Output regulation of nonlinear systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 35, pp. 131-140, 1990.
- [6] L.E. Ramos-Velasco, S. Čelikovský, V. Kučera, V. López-Morales, "Generalized output regulation problema for a class of nonlinear systems using error feedback", American Control Conference, pp. 1325-1330, Portland, USA, Junio, 2005

- [7] J. Carr, "Applications of centre manifold theory", Springer-Verlag, New York, 1981.
- [8] L.E. Ramos-Velasco, "Control de un sistema electromecánico subactuado (Pendubot)" (in Spanish), M.Sc Thesis, CINVESTAV GDL, 1999.
- [9] M. Bernal, R. Marquez, V. Estrada-Manzo, B. Castillo-Toledo, "An element-wise linear matrix inequality approach for output regulation problems", artículo aceptado en World Automation Congress, Puerto Vallarta 2012.
- [10] X.-J. Ma, Z.-Q. Sun, "Output tracking and regulation of nonlinear system based on Takagi-Sugeno fuzzy model" IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics Part B, Vol. 30(1) pp. 47-59. Feb 2000.
- [11] B. Castillo-Toledo, J.A. Meda-Campaña, A. Titli, "A fuzzy output regulator for Takagi-Sugeno fuzzy models", Proc. 2003 IEEE Internat. Symp. On Intelligent Control, Vol. 2, pp. 310-315, Houston, TX, Dec. 2003.
- [12] J.A. Meda-Campaña, B. Castillo-Toledo, G. Chen, "Synchronization of chaotic systems from a fuzzy regulation approach", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 160, pp. 2860-2875, 2009.
- [13] K. Tanaka and H.O. Wang, Fuzzy control systems design and analysis. A linear matrix inequality approach. John Wiley and Sons, New York, USA. 2001.
- [14] K. Tanaka, T. Hori, H.O. Wang, "A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 11 (4), pp 582-589, 2003.
- [15] M. Bernal, P. Hušek, V. Kučera, "Non quadratic stabilization of continuous-time systems in the Takagi-Sugeno form", Kybernetika, vol. 42 (6), pp. 665-672, 2006.
- [16] J.A. Meda-Campaña, J.C. Gómez-Mancilla, B. Castillo-Toledo, "On the exact output regulation for Takagi-Sugeno fuzzy systems", In Proc. of the 8th IEEE Conf. on Control and Automation, pp. 417-422, Xiamen, China, 2010.
- [17] T.M. Guerra and M. Bernal, "A way to escape from the quadratic framework", in Proc. FUZZ-IEEE Conference, pp. 784-789, Jeju, Korea, 2009.
- [18] T. Taniguchi, K. Tanaka, and H.O. Wang, "Model construction, rule reduction and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol.9 (4), pp. 525-537, 2001.
- [19] H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto, "Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 9 (2), 2001, pp. 324-332.
- [20] M. Bernal, R. Marquez, V. Estrada-Manzo, B. Castillo-Toledo, "Nonlinear output regulation via Takagi-Sugeno fuzzy mappings: a full-information LMI approach", artículo aceptado en IEEE World Congress on Computational Intelligence, Brisbane, Australia 2012.
- [21] M. Bernal and T.M. Guerra, "Generalized non-quadratic stability of continuous-time Takagi-Sugeno models", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 18 (4), 2010, pp 815-822.
- [22] S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnam, "Linear matrix inequalities in systems and control theory", SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [23] C. Scherer, "Linear matrix inequalities in control theory", Publicly available from Delft University, 2004.
- [24] E. Kim and H. Lee, "New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems", IEEE Trans. On Fuzzy Systems, vol. 8 (5), pp. 523-533, 2000.
- [25] A. Sala and C. Ariño, "Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Poly's theorem" Fuzzy Sets and Systems, Vol. 158, (24), pp 2671-2686, 2007.



Víctor Estrada M. nació en Zamora, Michoacán en 1987. Es ingeniero mecatrónico por la Universidad de Guadalajara, Lagos de Moreno, Jalisco, en 2009.

Él estudia el segundo año de la maestría en ciencias en ingeniería eléctrica área control automático en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, unidad Guadalajara en Jalisco. Sus áreas de interés son el control de sistemas no lineales, modelado Takagi-Sugeno, desigualdades matriciales lineales.



Bernardino Castillo T. nació en Cd. Ixtotec, Oaxaca. Obtuvo el grado de Doctor en Ciencias Especialidad Control Automático por la Universidad de Roma "La Sapienza" en 1992.

Él es profesor investigador en el Departamento de Ingeniería Eléctrica y Ciencias Computacionales del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, en Guadalajara, Jalisco. Sus líneas de investigación: análisis y síntesis de esquemas de control para sistemas, control de procesos por computadora, control de robots.

El Dr. Castillo pertenece al Sistema Nacional de Investigadores con nivel 2 y *Senior Member* en la IEEE.



Miguel A. Bernal R. nació en Guadalajara, Jalisco en 1976. Obtuvo el grado de maestro en ciencias en ingeniería eléctrica por el CINVESTAV unidad Guadalajara en 1999 y el grado de Doctor en Ciencias en control automático por la Czech Technical University, Praga, República Checa en 2005.

Actualmente es profesor investigador categoría B en el Instituto Tecnológico de Sonora, en Ciudad Obregón, Sonora. Del 2006 al 2009 realizó una estancia postdoctoral con el grupo de investigación de sistemas, modelado y control del Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique Industrielles et Humaines, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Francia. Ha sido profesor en diversas universidades en México. Sus líneas de investigación abarcan análisis y modelado de sistemas no lineales a través de programación convexa para modelos difusos y neuronales.

El Dr. Bernal pertenece al Sistema Nacional de Investigadores con nivel 1.